Contribución al Estudio de los Poliedros Arquimedianos

II

Prof. T. Alvarez Peralto

TA
14
V-I
0749

EUITIS
BIBLIOTECA

R. 7815
i19024988

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 1 al 10

Ver "observaciones para impresión"
en Poliedros regulares.

TA
514
ALV
II

EUITIS
BIBLIOTECA

Poliedros arquimedianos

CAPITULO I
Consideraciones generales de existencia.

1. Definición

Se denomina poliedro arquimediano, a todo poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares no todos de igual número de lados, y sus ángulos sólidos son iguales o simétricos pero no regulares.

Los poliedros arquimedianos se diferencian de los regulares en que en éstos todas sus caras son polígonos regulares iguales, y en aquéllos puede haber caras formadas por polígonos regulares de distinto número de lados.

Los poliedros arquimedianos se conocen también por el nombre de poliedros semirregulares.

2. Condiciones necesarias para la existencia de un poliedro arquimediano.

La definición de dichos poliedros, implica que:

a) Han de ser poliedros convexos.

b) Sus caras deberán ser polígonos regulares, no todos iguales.

c) Sus ángulos sólidos han de ser todos iguales o simétricos dos a dos.

Vamos a establecer mediante un detallado análisis las condiciones necesarias que ha de cumplir

UNE A4 210 X 297

un poliedro determinado para que se verifiquen las propiedades anteriores.

2.1 Condiciones necesarias para que un poliedro sea convexo.

Recordemos que se denomina poliedro en general, a todo sólido o cuerpo geométrico limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezca a dos de dichos polígonos, y que dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común no pertenezcan al mismo plano.

Los polígonos del conjunto se llaman caras del poliedro; los lados de sus caras, aristas; los vértices de sus caras, son también vértices del poliedro; los ángulos internos de sus caras, ángulos planos del poliedro. Los planos de dos caras contiguas forman un ángulo que recibe el nombre de diedro del poliedro.

En cada vértice del poliedro concurren varias aristas y ángulos planos, formando su conjunto una figura geométrica que se denomina ángulo sólido del poliedro.

Un poliedro se llama convexo si al prolongar cualquiera de sus caras queda todo él en la misma región del espacio en que queda dividido por el plano de dicha cara.

En todo poliedro convexo existe pues un cierto mi-

UNE A4 210 X 297

mero de ángulos sólidos. Por lo tanto, la posibilidad de existencia de un poliedro convexo está supeditada a la posibilidad de existencia de un ángulo sólido convexo.

Esta posibilidad implica las siguientes condiciones necesarias:

1ª condición.- La suma de los ángulos planos internos de las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo en cada uno de sus vértices, tiene que ser menor de cuatro rectos,

puesto que si fuese igual a cuatro rectos, el ángulo sólido se transforma en un plano, y si fuese mayor, el ángulo sólido sería cóncavo y por consiguiente también el poliedro.

2ª condición.- El mayor ángulo plano interno de todas las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo ha de ser menor que la suma de los ángulos planos internos de las caras restantes.

ya que si dicho ángulo es igual a la suma de los restantes ángulos, el ángulo sólido se transforma en un plano, y si fuese mayor, no podría cerrarse el espacio con los ángulos de todas sus caras.

UNE A4 210 X 297

2.2 Condiciones necesarias para que un poliedro convexo tenga sus caras formadas por polígonos regulares, no todas iguales.

La posibilidad de existencia de poliedros convexos con caras poligonales regulares, no todas iguales, se estudia partiendo de los ángulos sólidos que se puedan formar acoplando polígonos regulares alrededor de un vértice, y que cumplan las condiciones 1ª y 2ª.

En primer lugar podemos observar que si fuesen todas las caras polígonos regulares diferentes, no se podría construir un ángulo sólido con un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular y un exágono regular, ya que la suma de sus ángulos sería $60° + 90° + 108° + 120° = 378° > 360°$ (cond. 1ª), y si fuesen todas las caras iguales sólo podría existir un ángulo sólido con menos de seis triángulos equiláteros, ya que $6 \times 60° = 360°$ (cond. 1ª), lo cual limita a cinco el número máximo de caras ($C = 5$), y a solo tres el de tipos diferentes de polígonos regulares. Por consiguiente:

3ª condición. - El ángulo sólido de un poliedro arquimediano puede ser triedro, tetraedro o pentaedro.

UNE A4 210 X 297

4ª condición.- En el ángulo sólido de un poliedro arquimediano solo existirán como máximo tres caras distintas (o polígonos regulares).

2.3 Casos posibles de ángulos sólidos formados por caras regulares, no todas iguales.

Vamos a establecer de forma exhaustiva los posibles casos de polígonos regulares que puedan formar un ángulo sólido cumpliendo las condiciones 1ª a 4ª establecidas en los anteriores párrafos 2.1 y 2.2.

Para ello consideremos sucesivamente ángulos sólidos de cinco, cuatro y tres caras que son los solo posibles (condición 3ª) y en cada uno de ellos estudiemos progresivamente los que surjan cuando la suma de ángulos planos de sus caras vayan siendo monótonamente crecientes, comensando por el de menor suma. De esta forma agotaremos todos los casos posibles. (en tinta roja señalaremos las condiciones cumplidas en cada caso).

Recordemos previamente que el ángulo plano interno α de un polígono regular, o sea el formado por dos lados consecutivos, tiene por valor, en grados sexagesimales

$$\alpha = 180^\circ \times \frac{n-2}{n} \qquad (n > 2)$$

Llamemos $\overline{P_3,\ P_4,\ P_5 \ldots P_n}$ a un polígono regular de $\overline{3,\ 4,\ 5 \ldots n}$ lados, y por consiguiente también

UNE A4 210 X 297

de n vértices, siendo n entero y mayor de 2.

2.31 Casos posibles de ángulos sólidos formados por cinco caras regulares, no todas iguales.

1 $4\,P_3 + 1\,P_4$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$4 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} = 330° < 360°$ (1ª)

$\alpha_4 = 180° \times \frac{2}{4} = 90° < 4\,\alpha_3 = 4 \times 180° \times \frac{1}{3} = 240°$ (2ª)

---

2 $4\,P_3 + 1\,P_5$ ($3^{\underline{o}}$, $4^{\underline{o}}$)

$4 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} = 348° < 360°$ (1ª)

$\alpha_5 = 180° \times \frac{3}{5} = 108° < 4\,\alpha_3 = 4 \times 180° \times \frac{1}{3} = 240°$ (2ª)

$4\,P_3 + 1\,P_n$, siendo $n > 5$, no cumplen ya la condición 1ª

Igualmente $3\,P_3 + 2\,P_n$, siendo $n > 3$, tampoco cumplen la condición 1ª

2.32 Casos posibles de ángulos sólidos formados por cuatro caras regulares, no todas iguales.

3 $3P_3 + 1P_n$ (3er y 4to) (∞ soluciones)

$3 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{n-2}{n} = 360° \times \frac{n-2}{n} < 360°$ (1º)

$\alpha_n = 180° \times \frac{n-2}{n} < 3\alpha_3 = 180°$ ($n > 3$) (2º)

---

4 $2P_3 + 2P_4$ (3er y 4to)

$2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{2}{4} = 300° < 360°$ (1º)

$\alpha_4 < 2\alpha_3 + \alpha_4$ (2º)

---

5 $2P_3 + 1P_4 + 1P_5$ (3er y 4to)

$2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{3}{5} = 180° \times \frac{53}{30} = 318° < 360°$ (1º)

$\alpha_5 = 180° \times \frac{3}{5} = 108° < 2\alpha_3 + \alpha_4 = 2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} = 210°$ (2º)

hasta

11 $2P_3 + 1P_4 + 1P_{11}$ (3er y 4to)

$2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{9}{11} = 180° \times \frac{131}{66} \simeq 358° < 360°$ (1º)

$2P_3 + 1P_4 + 1P_n$ siendo $n > 11$ no cumple ya la condición 1º

---

12 $2P_3 + 2P_5$ (3er y 4to)

$2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{3}{5} = 336° < 360°$ (1º)

$\alpha_5 < 2\alpha_3 + \alpha_5$ (2º)

---

13 $2P_3 + 1P_5 + 1P_6$ (3er y 4to)

$2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{4}{6} = 348° < 360°$ (1º)

$\alpha_6 = 180° \times \frac{4}{6} = 120° < 2\alpha_3 + \alpha_5 = 2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} = 228°$ (2º)

---

14 $2P_3 + 1P_5 + 1P_7$ (3^a y 4^a)

$2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} + 120° \times \frac{5}{7} \cong 357° < 360°$ (1^a)

$\alpha_7 = 180 \times \frac{5}{7} \cong 129° < 2\alpha_3 + \alpha_5 = 2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} = 228°$ (2^a)

$2P_3 + 1P_5 + 1P_n$ siendo $n > 7$ no cumple ya la condición 1^a

---

15 $1P_3 + 3P_4$ (3^a y 4^a)

$180° \times \frac{1}{3} + 3 \times 180° \times \frac{2}{4} = 330° < 360°$ (1^a)

$\alpha_4 < \alpha_3 + 2\alpha_4$ (2^a)

---

16 $1P_3 + 2P_4 + 1P_5$ (3^a y 4^a)

$180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{3}{5} = 348° < 360°$ (1^a)

$\alpha_5 = 180° \times \frac{3}{5} = 108° < 1\alpha_3 + 2\alpha_4 = 240°$ (2^a)

$1P_3 + 2P_4 + 1P_n$ siendo $n > 5$ no cumple ya la condición 1^a

y $1P_3 + 1P_4 + 2P_n$ siendo $n > 4$ tampoco

2.33 Casos posibles de ángulos sólidos formados por tres caras regulares, no todas iguales.

17 $2P_3 + 1P_4$ (3^a y 4^a)

$2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} = 210° < 360°$ (1^a)

$\alpha_4 = 90° < 2\alpha_3 = 120°$ (2^a)

---

18 $2P_3 + 1P_5$ (3^a y 4^a)

$2 \times 180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} = 228° < 360°$ (1^a)

$\alpha_5 = 108° < 2\alpha_3 = 120°$ (2^a)

$2P_3 + 1P_n$ siendo $n > 5$ no cumple ya la condición 2^a

19 $1P_3 + 2P_4$ (3^a y 4^a)

$180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{2}{4} = 240° < 360°$ (1ª)

$\alpha_4 < \alpha_3 + \alpha_4$ (2ª)

---

20 $1P_3 + 1P_4 + 1P_5$ (3^a y 4^a) hasta

$180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{3}{5} = 258° < 360°$ (1ª)

$\alpha_5 = 108° < \alpha_3 + \alpha_4 = 150°$ (2ª)

26 $1P_3 + 1P_4 + 1P_{11}$ (3^a y 4^a)

$180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{9}{11} \cong 298° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{11} = 180° \times \frac{9}{11} \cong 148° < \alpha_3 + \alpha_4 = 150°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_4 + 1P_n$ siendo $n > 11$ no cumple ya la condición 2ª

---

27 $1P_3 + 2P_5$ (3^a y 4^a)

$180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{3}{5} = 276° < 360°$ (1ª)

$\alpha_5 < \alpha_3 + \alpha_5$ (2ª)

---

28 $1P_3 + 1P_5 + 1P_6$ (3^a y 4^a) hasta

$180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{1}{6} = 288° < 360°$ (1ª)

$\alpha_6 = 120° < \alpha_3 + \alpha_5 = 60° + 105° = 165°$ (2ª)

51 $1P_3 + 1P_5 + 1P_{29}$

$180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{27}{29°} \cong 336° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{29} \cong 167° < \alpha_3 + \alpha_5 = 60° + 108° = 168°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_5 + 1P_{30}$ no cumple ya la condición 2ª

UNE A4 210 x 297

52 $1P_3 + 2P_6$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{4}{6} = 300° < 360°$ (1ª)

$\alpha_6 < \alpha_3 + \alpha_6$ (2ª)

---

53 $1P_3 + 1P_6 + 1P_n$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{4}{6} + 180° \times \frac{n-2}{n} = 180° +$

$+ 180° \times \frac{n-2}{n} < 360°$ (1ª)

(∞ soluciones) $\alpha_n = 180° \times \frac{n-2}{n} < \alpha_3 + \alpha_6 = 180°$ (2ª)

$(n > 6)$

---

54 $1P_3 + 2P_7$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{5}{7} \cong 318° < 360°$ (1ª)

$\alpha_7 < \alpha_3 + \alpha_7$ (2ª)

---

55 $1P_3 + 1P_7 + 1P_8$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{5}{7} + 180° \times \frac{6}{8} \cong 324 < 360°$ (1ª)

$\alpha_8 = 180° \times \frac{6}{8} = 135° < \alpha_3 + \alpha_7 = 60° + 127° = 187°$ (2ª)

y hasta hasta

88 $1P_3 + 1P_7 + 1P_{41}$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{5}{7} + 180° \times \frac{39}{41} \cong 359{,}8 < 360°$ (1ª)

$\alpha_{41} = 180° \times \frac{39}{41} \cong 172° < \alpha_3 + \alpha_7 \cong 188°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_7 + 1P_{42}$ no cumple ya la condición 1ª

---

89 $1P_3 + 2P_8$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{6}{8} = 330° < 360°$ (1ª)

$\alpha_8 < \alpha_3 + \alpha_8$ (2ª)

UNE A4 210 X 297

E. JUITIS BIBLIOTECA

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 11 al 20

90 $1P_3 + 1P_8 + 1P_9$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{6}{8} + 180° \times \frac{7}{9} = 335° < 360$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_9 = 140° < \alpha_3 + \alpha_8 = 195°$ (2ª)

hasta hasta

104 $1P_3 + 1P_8 + 1P_{23}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{6}{8} + 180° \times \frac{21}{23} \cong 359,4° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{23} \cong 164° < \alpha_3 + \alpha_8 = 60 + 135 = 195°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_8 + 1P_{24}$ no cumple ya la condición 1ª

---

105 $1P_3 + 2P_9$ $180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{7}{9} = 340° < 360°$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_9 < \alpha_3 + \alpha_9$ (2ª)

---

106 $1P_3 + 1P_9 + 1P_{10}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{7}{9} + 180° \times \frac{8}{10} = 344° < 360°$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_{10} = 144° < \alpha_3 + \alpha_9 = 200°$ (2ª)

hasta hasta

113 $1P_3 + 1P_9 + 1P_{17}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{7}{9} + 180° \times \frac{15}{17} \cong 359° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{17} \cong 159° < \alpha_3 + \alpha_9 = 200°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_9 + 1P_{18}$ no cumple ya la condición 1ª

---

114 $1P_3 + 2P_{10}$ $180° \times \frac{1}{3} + 2 180° \times \frac{8}{10} = 348° < 360°$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_{10} < \alpha_3 + \alpha_{10}$ (2ª)

UNE A4 210 X 297

115 $1P_3 + 1P_{10} + 1P_{11}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{8}{10} + 180° \times \frac{9}{11} \cong 352° < 360°$ (1ª)

($3^{\underline{a}}$ y $4^{\underline{a}}$) $\alpha_{11} \cong 148° < \alpha_3 + \alpha_{10} = 204°$ ($2^{\underline{a}}$)

hasta hasta

118 $1P_3 + 1P_{10} + 1P_{14}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{8}{10} + 180° \times \frac{12}{14} \cong 359° < 360°$ ($1^{\underline{a}}$)

$\alpha_{14} \cong 155° < \alpha_3 + \alpha_{10} = 204°$ ($2^{\underline{a}}$)

$1P_3 + 1P_{10} + 1P_{15}$ no cumple ya la condición $1^{\underline{a}}$

---

119 $1P_3 + 2P_{11}$ $180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{9}{11} \cong 355° < 360°$ ($1^{\underline{a}}$)

($3^{\underline{a}}$ y $4^{\underline{a}}$) $\alpha_{11} < \alpha_3 + \alpha_{11}$ ($2^{\underline{a}}$)

---

120 $1P_3 + 1P_{11} + 1P_{12}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{9}{11} + 180° \times \frac{10}{12} \cong 358° < 360°$ ($1^{\underline{a}}$)

($3^{\underline{a}}$ y $4^{\underline{a}}$) $\alpha_{12} = 150° < \alpha_3 + \alpha_{11} = 60° + 147 = 207°$ ($2^{\underline{a}}$)

---

121 $1P_3 + 1P_{11} + 1P_{13}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{9}{11} + 180° \times \frac{11}{13} \cong 359{,}6° < 360°$ ($1^{\underline{a}}$)

($3^{\underline{a}}$ y $4^{\underline{a}}$) $\alpha_{13} \cong 151° < \alpha_3 + \alpha_{11} = 207°$ ($2^{\underline{a}}$)

$1P_3 + 1P_{11} + 1P_{14}$ no cumple ya la condición $1^{\underline{a}}$
y $1P_3 + 2P_{12}$ tampoco

---

122 $2P_4 + 1P_n$ $2 \times 180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{n-2}{n} = 180° + 180° \frac{n-2}{n} < 360°$ ($1^{\underline{a}}$)

($3^{\underline{a}}$ y $4^{\underline{a}}$) $\alpha_n = 180° \times \frac{n-2}{n} < 2\alpha_4 = 180°$ ($2^{\underline{a}}$)

(∞ soluciones) ($n > 4$)

UNE A4 210 X 297

123 $1P_4 + 2P_5$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 2 \times 180° \times \frac{3}{5} = 306° < 360°$ (1ª)

$\alpha_5 < \alpha_4 + \alpha_5$ (2ª)

---

124 $1P_4 + 1P_5 + 1P_6$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{4}{6} = 318° < 360°$ (1ª)

$\alpha_6 = 120° < \alpha_4 + \alpha_5 = 198°$ (2ª)

hasta

137 $1P_4 + 1P_5 + 1P_{19}$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{17}{19} \cong 359,1° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{19} \cong 162° < \alpha_4 + \alpha_5 = 198°$ (2ª)

$1P_4 + 1P_5 + 1P_{20}$ no cumple ya la condición 1ª

---

138 $1P_4 + 2P_6$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 2 \times 180° \times \frac{4}{6} = 330° < 360°$ (1ª)

$\alpha_6 < \alpha_4 + \alpha_6$ (2ª)

---

139 $1P_4 + 1P_6 + 1P_7$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{4}{6} + 180° \times \frac{5}{7} \cong 339° < 360°$ (1ª)

$\alpha_7 \cong 129° < \alpha_4 + \alpha_6 = 210°$ (2ª)

hasta

143 $1P_4 + 1P_6 + 1P_{11}$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{4}{6} + 180° \times \frac{9}{11} \cong 358° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{11} = 148° < \alpha_4 + \alpha_6 = 210°$ (2ª)

$1P_4 + 1P_6 + 1P_{12}$ no cumple ya la condición 1ª

UNE A4 210 X 297

144 $1P_4 + 2P_7$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 2 \times 180° \times \frac{5}{7} \cong 348° < 360°$ (1º)

$\alpha_7 < \alpha_4 + \alpha_7$ (2º)

---

145 $1P_4 + 1P_7 + 1P_8$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{5}{7} + 180° \times \frac{6}{4} \cong 354° < 360°$ (1º)

$\alpha_8 = 135° < \alpha_4 + \alpha_7 \cong 90° + 128° = 218°$ (2º)

146 $1P_4 + 1P_7 + 1P_9$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{5}{7} + 180° \times \frac{7}{9} \cong 359° < 360°$ (1º)

$\alpha_9 = 140° < \alpha_4 + \alpha_7 \cong 218°$ (2º)

$1P_4 + 1P_7 + 1P_{10}$ no cumple ya la condición 1º

$1P_4 + 2P_8$ y $1P_4 + 1P_8 + 1P_n$ $(n > 8)$ no cumplen la condic. 1º

---

147 $2P_5 + 1P_6$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$2 \times 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{4}{6} = 336° < 360°$ (1º)

$\alpha_6 = 120° < 2\alpha_5 = 216°$ (2º)

hasta

150 $2P_5 + 1P_9$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$2 \times 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{7}{9} = 356° < 360°$ (1º)

$\alpha_9 = 140° < 2\alpha_5 = 216°$ (2º)

$2P_5 + 1P_{10}$ no cumple ya la condición 1º

---

151 $1P_5 + 2P_6$ ($3^{\underline{o}}$ y $4^{\underline{o}}$)

$180° \times \frac{3}{5} + 2 \times 180° \times \frac{4}{6} = 348° < 360°$ (1º)

$\alpha_6 < \alpha_5 + \alpha_6$ (2º)

UNE A4 210 X 297

152 $1P_5 + 1P_6 + 1P_7$ $\quad 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{4}{6} + 180° \times \frac{5}{7} \cong 357° < 360°$ $\quad (1^{\underline{a}})$

($3^{\underline{a}}$ y $4^{\underline{a}}$)

$\alpha_7 \cong 129° < \alpha_5 + \alpha_6 = 228°$ $\quad (2^{\underline{a}})$

$1P_5 + 1P_6 + 1P_8$ no cumple ya la condición $1^{\underline{a}}$

$1P_5 + 2P_7$ y $1P_5 + 1P_7 + 1P_n$ $(n > 8)$ no cumplen la condición $1^{\underline{a}}$

Como resumen del estudio de los casos posibles de ángulos sólidos formados por caras regulares, obtenemos los siguientes resultados

A	Angulos sólidos de 5 caras	Casos 1 y 2	= 2
B	Angulos sólidos de 4 caras	Casos 3 al 16	= 14
C	Angulos sólidos de 3 caras	Casos 17 al 152	= 136
		Total	= 152

los casos nºs 3 $\quad 3P_3 + 1P_n \quad (n > 3)$

53 $\quad 1P_3 + 1P_6 + 1P_n \quad (n > 6)$

122 $\quad 2P_4 + 1P_n \quad (n > 4)$

admiten infinitas soluciones cada uno.

UNE A4 210 X 297

2.4 Relaciones métricas que han de cumplir las caras, vértices y aristas de un poliedro arquimediano.

Llamemos $\widehat{C_a}$ al número total de caras iguales de un poliedro arquimediano, de $\widehat{a}$ lados cada una; $\widehat{C_b}$ al total de caras iguales de $\widehat{b}$ lados (distintas de $\widehat{C_a}$) y $\widehat{C_c}$ al total de caras iguales de $\widehat{c}$ lados (distintas de $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$), según la condición 4ª del párrafo 2.2 estas son las máximas posibilidades.

Al mismo tiempo denominaremos $\widehat{n_a}$ al número de caras de $\widehat{a}$ lados que concurren en un vértice cualquiera (son todos iguales o simétricos); $\widehat{n_b}$ al número de caras de $\widehat{b}$ lados y $\widehat{n_c}$ al de $\widehat{c}$ lados, todas concurrentes en el mismo vértice.

Según la condición 3ª del párrafo 2,2, deberá verificarse

$$3 \leqq n_a + n_b + n_c \leqq 5 \qquad [1]$$

Por otra parte, si designamos por $\widehat{C}$ al número total de caras del poliedro arquimediano (polígonos regulares no todos iguales), por $\widehat{V}$ al número total de vértices (ángulos sólidos iguales o simétricos) y por $\widehat{A}$ el número total de aristas (todas iguales), se verificará

$$C = C_a + C_b + C_c \qquad [2]$$

UNE A4 210 X 297

Tengamos también presente el conocido "Teorema de Euler" para los poliedros convexos que relaciona $\widehat{C}$, $\widehat{V}$ y $\widehat{A}$ de la siguiente forma .

$$\widehat{C + V = A + 2} \qquad [3]$$

Siendo cada arista común a dos caras contiguas, la suma de los productos $\widehat{a\,C_a + b\,C_b + c\,C_b}$ será igual al doble de las aristas del poliedro arquimediano, por lo que se verificará que

$$\widehat{\frac{1}{2}\left(a\,C_a + b\,C_b + c\,C_c\right) = A} \qquad [4]$$

Considerando que en cada vértice de un poliedro arquimediano concurren un número $\widehat{n}$ de caras igual al de aristas, o sea una arista por cada cara concurrente, si $\widehat{n_a}$ es el número de caras de $\widehat{a}$ lados que concurren en dicho vértice, el producto $\widehat{n_a\,V}$ nos representará el número total de aristas de las caras de $\widehat{a}$ lados que concurren en el total de vértices del poliedro.

Por otra parte, como cada cara de $\widehat{a}$ lados tiene a su vez $\widehat{a}$ vértices, el producto del total $\widehat{C_a}$ de las caras de este tipo que forman dichos poliedros arquimedianos por el número de sus lados $\widehat{a}$, o sea $\widehat{a\,C_a}$, nos representará igualmente el total de aristas de las caras de $\widehat{a}$ lados que concurren en el total de vértices del poliedro.

UNE A4 210 X 297

En consiguiente se verificará para las caras regulares de $\widehat{a}$ lados que

$$a\,C_a = n_a\,V \qquad [5]$$

Razonando igualmente para las caras regulares de $\widehat{b}$ lados, tendremos a su vez

$$b\,C_b = n_b\,V \qquad [6]$$

y para las de $\widehat{c}$ lados (si existen)

$$c\,C_c = n_c\,V \qquad [7]$$

debiendo verificarse que las sumas

$$a\,C_a + b\,C_b + c\,C_c = V\left(n_a + n_b + n_c\right) = 2A \qquad [8]$$

ya que cada arista pertenece simultáneamente a dos caras contiguas y sus extremos pertenecen igualmente a dos vértices del poliedro

Despejando $\widehat{C_a}$, $\widehat{C_b}$ y $\widehat{C_c}$ en las igualdades [5], [6] y [7], y sustituyéndolas en la [2], tendremos

$$C = V\left(\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c}\right) \qquad [9]$$

Sustituyendo los valores de las igualdades [5], [6] y [7] en la [4], tendremos

E.U.I.T.I.S. BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297

$$A = \frac{V}{2}\left(n_a + n_b + n_c\right) \qquad [10]$$

Finalmente, sustituyendo los valores de $\widehat{C}$ y $\widehat{\Delta}$ obtenidos en [9] y [10], en la igualdad [3], tendremos

$$V\left(\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c}\right) + V = \frac{V}{2}\left(n_a + n_b + n_c\right) + 2$$

de la cual, despejando V, será

$$V = \frac{4abc}{2ab\,n_c + 2c\,(a\,n_b + b\,n_a) + abc\,(2 - n_a - n_b - n_c)} \qquad [11]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$V\left(\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c}\right) + V = \frac{V}{2}\left(n_a + n_b + n_c\right) + 2$$

$$V\left[\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c} + 1 - \frac{n_a}{2} - \frac{n_b}{2} - \frac{n_c}{2}\right] = 2$$

$$V = \frac{2}{\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c} + 1 - \frac{n_a}{2} - \frac{n_b}{2} - \frac{n_c}{2}} =$$

$$= \frac{4abc}{2bc\,n_a + 2ac\,n_b + 2ab\,n_c + 2abc - abc\,n_a - abc\,n_b - abc\,n_c} =$$

$$= \frac{4abc}{2ab\,n_c + 2c\,(a\,n_b + b\,n_a) + abc\,(2 - n_a - n_b - n_c)}$$

Si para simplificar hacemos

$$\Delta = 2abn_c + 2c(an_b + bn_a) + abc(2 - n_a - n_b - n_c) \qquad [12]$$

tendremos finalmente

$$V = \frac{4abc}{\Delta} \qquad [13]$$

valor que sustituido en [5], [6] y [7], nos da

$$C_a = \frac{n_a}{a} V = \frac{4bcn_a}{\Delta} \qquad [14]$$

así como

$$C_b = \frac{n_b}{b} V = \frac{4acn_b}{\Delta} \qquad [15]$$

y también

$$C_c = \frac{n_c}{c} V = \frac{4abn_c}{\Delta} \qquad [16]$$

Las fórmulas [13], [14], [15] y [16], junto con la [12] así como la [3] son las fundamentales que han de emplearse para determinar el número de caras y clases de ellas, el de vértices y el de aristas de todo poliedro arquimediano, debiendo ser sus soluciones números enteros.

Dichas fórmulas han sido deducidas para el caso general de que en un vértice del poliedro concurran tres polígonos regulares diferentes (condición 4ª) de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 21 al 30

y $\widehat{c}$ lados. Si sólo concurriesen dos polígonos regulares diferentes de $\widehat{c}$ y $\widehat{b}$ lados respectivamente, dichas fórmulas quedarían simplificadas como sigue, ya que al suprimir el valor $\widehat{c}$ de ellas, $\overline{n_c}$ se hace igual a cero.

La fórmula [12] se transformaría en

$$\Delta' = 2\,(a\,n_b + b\,n_a) + ab\,(2 - n_a - n_b) \qquad [17]$$

la [13], en

$$V = \frac{4\,ab}{\Delta'} \qquad [18]$$

la [14] en

$$C_a = \frac{4\,b\,n_a}{\Delta'} \qquad [19]$$

la [15] en

$$C_b = \frac{4\,a\,n_b}{\Delta'} \qquad [20]$$

y la [16] no ha lugar, por no existir caras C_c

Como resumen de lo expuesto en este párrafo hacemos destacar que las fórmulas [12] a [16] y [17] a [20] establecen las relaciones métricas que han de cumplir las caras, vértices y aristas de todo poliedro arquimediano, y por consiguiente fijan condiciones necesarias para la determinación de los mismos, puesto que sus soluciones han de ser siempre números enteros.

UNE A4 210 X 297

Así pues, de forma explícita establecemos la siguiente condición necesaria para la existencia de poliedros arquimedianos.

5ª condición: El número de caras, vértices y aristas de todo poliedro arquimediano han de ser soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

A) Para el caso de que en cada uno de sus vértices concurran tres caras regulares diferentes de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, y $\widehat{c}$ lados respectivamente, siendo $\widehat{n_a}$, $\widehat{n_b}$ y $\widehat{n_c}$ el número de cada una de ellas:

$$\Delta = 2ab\,n_c + 2c(a\,n_b + b\,n_a) + abc\,(2 - n_a - n_b - n_c) \qquad (I)$$

$$V = \frac{4abc}{\Delta} \qquad (II)$$

$$C_a = \frac{4bc\,n_a}{\Delta} \qquad (III)$$

$$C_b = \frac{4ac\,n_b}{\Delta} \qquad (IV)$$

$$C_c = \frac{4ab\,n_c}{\Delta} \qquad (V)$$

B) Para el caso de que en cada uno de sus vértices concurran dos caras regulares diferentes, de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ lados respectivamente, siendo $\widehat{n_a}$ y $\widehat{n_c}$ el número de cada una de ellas:

UNE A4 210 X 297

$$\Delta' = 2(a\,n_b + b\,n_a) + ab(2 - n_a - n_b) \qquad (VI)$$

$$V = \frac{4ab}{\Delta'} \qquad (VII)$$

$$C_a = \frac{4b\,n_a}{\Delta'} \qquad (VIII)$$

$$C_b = \frac{4a\,n_b}{\Delta'} \qquad (IX)$$

2.5 Casos posibles de poliedros arquimedianos cuyos ángulos sólidos están formados por caras regulares, no todas iguales.

La condición 5ª, establecida en el anterior párrafo 2.4 nos va a servir para limitar las posibles soluciones estudiadas en el párrafo 2.3, eliminando de estas últimas las que no cumplan dicha condición 5ª.

Estudiaremos esta selección siguiendo el mismo orden de los casos posibles planteados en los párrafos 2.31 a 2.33.

2.51 Casos posibles de poliedros arquimedianos con cinco caras regulares, no todas iguales.

1 $\boxed{4\,P_3 + 1\,P_4}$ $\quad P_3\ (a = 3;\ n_a = 4) \quad P_4\ (b = 4;\ n_b = 1)$

(VI) $\quad \Delta' = 2 \times (3 \times 1 + 4 \times 4) + 3 \times 4\,(2 - 4 - 1) = 2$

(VII) $\quad V = 4 \times 3 \times 4 : 2 = 24$

(VIII) $\quad C_3 = 4 \times 4 \times 4 : 2 = 32$

UNE A4 210 X 297

(IX) $C_4 = 4 \times 3 \times 1 : 2 = 6$

$C = 32 + 6 = 38 \quad V = 24 \quad A = 60$ Caso posible

---

2 $\boxed{4\,P_3 + 1\,P_5}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 4)$ $P_5\ (b = 5;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + 5 \times 4) + 3 \times 5 \times (2 - 4 - 1) = 1$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 5 : 1 = 60$

(VIII) $C_3 = 4 \times 5 \times 4 : 1 = 80$

(IX) $C_5 = 4 \times 3 \times 1 : 1 = 12$

$C = 80 + 12 = 92 \quad V = 60 \quad A = 150$ Caso posible

2,52 Casos posibles de poliedros arquimedianos con cuatro caras regulares, no todas iguales

3 $\boxed{3\,P_3 + 1\,P_n\ (3 < n < \infty)}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 3)$ $P_n\ (b = n;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + n \times 3) + 3 \times n \times (2 - 3 - 1) = 6$ (para cualquier valor de n).

(VII) $V = 4 \times 3 \times n : 6 = 2n$

(VIII) $C_3 = 4 \times n \times 3 : 6 = 2n$

(IX) $C_n = 4 \times 3 \times 1 : 6 = 2$

$C = 2n + 2 = 2(n+1) \quad V = 2n \quad A = 4n$ Caso posible

Este caso es siempre posible para cualquier valor de $n > 3$; por consiguiente presenta infinitas posibilidades.

UNE A4 210 X 297

4 $\boxed{2P_3 + 2P_4}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times2 + 4\times2) + 3\times4\times(2-2-2) = 4$

(VII) $V = 4\times3\times4 : 4 = 12$

(VIII) $C_3 = 4\times4\times2 : 4 = 8$

(IX) $C_4 = 4\times3\times2 : 4 = 6$

$C = 8+6 = 14$ $V = 12$ $A = 24$ Caso posible

---

5 $\boxed{2P_3 + 1P_4 + 1P_5}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=1)$ $P_5\ (c=5;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times5\times(3\times1 + 4\times2) + 3\times4\times5\times(2-2-1-1) = 14$

(II) $V = 4\times3\times4\times5 : 14 = 240 : 14 = \frac{120}{7} =$ no entero

Caso no posible

---

6 $\boxed{2P_3 + 1P_4 + 1P_6}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=1)$ $P_6\ (c=6;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times6\ (3\times1 + 4\times2) + 3\times4\times6\times(2-2-1-1) = 12$

(II) $V = 4\times3\times4\times6 : 12 = 24$

(III) $C_3 = 4\times4\times6\times2 : 12 = 16$

(IV) $C_4 = 4\times3\times6\times1 : 12 = 6$

(V) $C_6 = 4\times3\times4\times1 : 12 = 4$

$C = 16+6+4 = 26$ $V = 24$ $A = 48$ Caso posible

---

7 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_7}$ $P_3\,(a=3;\ n_a=2)$ $P_4\,(b=4;\ n_b=1)$ $P_7\,(c=7;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times7\times(3\times1+4\times2) + 3\times4\times7\times(2-2-1-1) = 10$

(II) $V = 4\times3\times4\times7 : 10 = \frac{168}{5}$ = no entero Caso no posible

---

8 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_8}$ $P_3\,(a=3;\ n_a=2)$ $P_4\,(b=4;\ n_b=1)$ $P_8\,(c=8;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times8\times(3\times1+4\times2) + 3\times4\times8\times(2-2-1-1) = 8$

(II) $V = 4\times3\times4\times8 : 8 = 48$

(III) $C_3 = 4\times4\times8\times2 : 8 = 32$

(IV) $C_4 = 4\times3\times8\times1 : 8 = 12$

(V) $C_8 = 4\times3\times4\times1 : 8 = 6$

$C = 32+12+6 = 50$ $V = 48$ $\Delta = 96$ Caso posible

EUITIS BIBLIOTECA

---

9 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_9}$ $P_3\,(a=3;\ n_a=2)$ $P_4\,(b=4;\ n_b=1)$ $P_9\,(c=9;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times9\times(3\times1+4\times2) + 3\times4\times9\times(2-2-1-1) = 6$

(II) $V = 4\times3\times4\times9 : 6 = 72$

(III) $C_3 = 4\times4\times9\times2 : 6 = 48$

(IV) $C_4 = 4\times3\times9\times1 : 6 = 18$

(V) $C_9 = 4\times3\times4\times1 : 6 = 8$

$C = 48+18+8 = 74$ $V = 72$ $\Delta = 144$ Caso posible

10 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_{10}}$ $P_3\,(a=3;\ n_a=2)$ $P_4\,(b=4;\ n_b=1)$ $P_{10}\,(c=10;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times10\times(3\times1+4\times2) + 3\times4\times10\times(2-2-1-1) = 4$

(II) $V = 4\times3\times4\times10 : 4 = 120$

(III) $C_3 = 4\times4\times10\times2 : 4 = 80$

(IV) $C_4 = 4\times3\times10\times1 : 4 = 30$

(V) $C_{10} = 4\times3\times4\times1 : 4 = 12$

$C = 80 + 30 + 12 = 122$ $V = 120$ $A = 240$ Caso prolle

---

11 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_{11}}$ $P_3\,(a=3;\ n_a=2)$ $P_4\,(b=4;\ n_b=1)$ $P_{11}\,(c=11;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times11\times(3\times1+4\times2) + 3\times4\times11\times(2-2-1-1) = 2$

(II) $V = 4\times3\times4\times11 : 2 = 264$

(III) $C_3 = 4\times4\times11\times2 : 2 = 176$

(IV) $C_4 = 4\times3\times11\times1 : 2 = 66$

(V) $C_{11} = 4\times3\times4\times1 : 2 = 24$

$C = 176 + 66 + 24 = 266$ $V = 264$ $A = 528$ Caso prolle

---

12 $\boxed{2\,P_3 + 2\,P_5}$ $P_3\,(a=3;\ n_a=2)$ $P_5\,(b=5;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times2+5\times2) + 3\times5\times(2-2-2) = 2$

(VII) $V = 4\times3\times5 : 2 = 30$

(VIII) $C_3 = 4\times5\times2 : 2 = 20$

(IX) $C_5 = 4 \times 3 \times 2 : 2 = 12$

$C = 20 + 12 = 32 \quad V = 30 \quad A = 60$ Caso posible

---

13 $\boxed{2P_3 + 1P_5 + 1P_6}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_5\ (b=5;\ n_b=1)$ $P_6\ (c=6;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times5\times1 + 2\times6\times(3\times1 + 5\times2) + 3\times5\times6\times(2-2-1-1) = 6$

(II) $V = 4\times3\times5\times6 : 6 = 60$

(III) $C_3 = 4\times5\times6\times2 : 6 = 40$

(IV) $C_5 = 4\times3\times6\times1 : 6 = 12$

(V) $C_6 = 4\times3\times5\times1 : 6 = 10$

$C = 40 + 12 + 10 = 62 \quad V = 60 \quad A = 120$ Caso posible

---

14 $\boxed{2P_3 + 1P_5 + 1P_7}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_5\ (b=5;\ n_b=1)$ $P_7\ (c=7;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times5\times1 + 2\times7\times(3\times1 + 5\times2) + 3\times5\times7\times(2-2-1-1) = 2$

(II) $V = 4\times3\times5\times7 : 2 = 210$

(III) $C_3 = 4\times5\times7\times2 : 2 = 140$

(IV) $C_5 = 4\times3\times7\times1 : 2 = 42$

(V) $C_7 = 4\times3\times5\times1 : 2 = 30$

$C = 140 + 42 + 30 = 212 \quad V = 210 \quad A = 420$ Caso posible

---

15 $\boxed{1P_3 + 3P_4}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=3)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times3 + 4\times1) + 3\times4\times(2-1-3) = 2$

(VII) $V = 4\times3\times4 : 2 = 24$

UNE A4 210 X 297

(VIII) $C_3 = 4 \times 4 \times 1 : 2 = 8$

(IX) $C_4 = 4 \times 3 \times 3 : 2 = 18$

$C = 8 + 18 = 26 \quad V = 24 \quad A = 48$ Caso posible

---

16 $\boxed{1\ P_3 + 2\ P_4 + 1\ P_5}$ $P_3 (a=3;\ n_a=1)$ $P_4 (b=4;\ n_b=2)$ $P_5 (c=5;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 4 \times 1 + 2 \times 5 \times (3 \times 2 + 4 \times 1) + 3 \times 4 \times 5 \times (2 - 1 - 2 - 1) = 4$

(II) $V = 4 \times 3 \times 4 \times 5 : 4 = 60$

(III) $C_3 = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 4 = 20$

(IV) $C_4 = 4 \times 3 \times 5 \times 2 : 4 = 30$

(V) $C_5 = 4 \times 3 \times 4 \times 1 : 1 = 12$

$C = 20 + 30 + 12 = 62 \quad V = 60 \quad A = 120$ Caso posible

2.53 Casos posibles de poliedros arquimedianos con tres caras regulares, no todas iguales.

17 $\boxed{2\ P_3 + 1\ P_4}$ $P_3 (a=3;\ n_a=2)$ $P_4 (b=4;\ n_b=1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + 4 \times 2) + 3 \times 4 \times (2 - 2 - 1) = 10$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 4 : 10 = \frac{24}{5} =$ no entero Caso no posible

---

18 $\boxed{2\ P_3 + 1\ P_5}$ $P_3 (a=3;\ n_a=2)$ $P_5 (b=5;\ n_b=1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + 5 \times 2) + 3 \times 5 \times (2 - 2 - 1) = 11$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 5 : 11 = \frac{60}{11} =$ no entero Caso no posible

---

UNE A4 210 X 297

19 | $1\,P_3 + 2\,P_4$ | $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ | $P_4\ (b=4;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times2 + 4\times1) + 3\times4\times(2-1-2) = 8$

(VII) $V = 4\times3\times4 : 8 = 6$

(VIII) $C_3 = 4\times4\times1 : 8 = 2$

(IX) $C_4 = 4\times3\times2 : 8 = 3$

$C = 2+3 = 5 \qquad V = 6 \qquad A = 9$

Caso posible

---

20 al 26 | $1\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_n$, $4 < n < 12$ | $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ | $P_4\ (b=4;\ n_b=1)$ | $P_n\ (c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2n\times(3\times1 + 4\times1) + 3\times4\times n\times(2-1-1-1) = 24 + 2n$

(II) $V = 4\times3\times4\times n : (24+2n) = \dfrac{24\,n}{12+n}$

Siendo $4 < n < 12$, V es sólo entero para el valor de $n = 6$. Por consiguiente:

---

20 $n = 5$

Caso no posible

---

21 | $1\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_6$, $n=6$ | $\Delta = 24 + 2\times6 = 36$ | $V = \dfrac{24\times6}{12+6} = 8$

(III) $C_3 = 4\times4\times6\times1 : 36 = \dfrac{8}{3}$ = no entero

Caso no posible

---

22 al 26 $n = 7$ al $n = 11$

Casos no posibles

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 31 al 40

27 $\boxed{1\,P_3 + 2\,P_5}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_5\ (b=5;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times 2 + 5\times 1) + 3\times 5\times(2-1-2) = 7$

(VII) $V = 4\times 3\times 5 : 7 = \frac{60}{7}$ = no entero Caso no posible

---

28 al 51 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_5 + 1\,P_n \quad 5 < n < 30}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_5\ (b=5;\ n_b=1)$ $P_n\ (c=n;\ n_c=1)$.

(I) $\Delta = 2\times 3\times 5\times 1 + 2\times n\times(3\times 1 + 5\times 1) + 3\times 5\times n\times(2-1-1-1) = 30+n$

(II) $V = 4\times 3\times 5\times n : (30+n) = \frac{60\,n}{30+n}$

Siendo $5 < n < 30$, V es sólo entero para los valores de n siguientes: 6, 10, 15, 20. Por consiguiente:

---

28 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_5 + 1\,P_6 \quad n=6}$ $\Delta = 30+6 = 36$ $V = \frac{60\times 6}{30+6} = 10$

(III) $C_3 = 4\times 5\times 6\times 1 : 36 = \frac{10}{3}$ = no entero Caso no posible

---

29 al 31 $n = 7$ al $n = 9$ Casos no posibles

---

32 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_5 + 1\,P_{10} \quad n=10}$ $\Delta = 30+10 = 40$ $V = \frac{60\times 10}{30+10} = 15$

(III) $C_3 = 4\times 5\times 10\times 1 : 40 = 5$

(IV) $C_5 = 4\times 3\times 10\times 1 : 40 = 3$

(V) $C_{10} = 4\times 3\times 5\times 1 : 40 = \frac{3}{2}$ = no entero Caso no posible

---

UNE A4 210 X 297

33 $n = 11$
al al
36 $n = 14$

Caso no posible

---

37 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_5 + 1\,P_{15}}$ $n = 15$ $\quad \Delta = 30 + 15 = 45 \quad V = \dfrac{60 \times 15}{30 + 15} = 20$

(III) $C_3 = 4 \times 5 \times 15 \times 1 : 45 = \dfrac{20}{3} =$ no entero

Caso no posible

---

38 $n = 16$
al al
41 $n = 19$

Caso no posible

---

42 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_5 + 1\,P_{20}}$ $n = 20$ $\quad \Delta = 30 + 20 = 50 \quad V = \dfrac{60 \times 20}{30 + 20} = 24$

(II) $C_3 = 4 \times 5 \times 20 \times 1 : 50 = 8$

(IV) $C_5 = 4 \times 3 \times 20 \times 1 : 50 = \dfrac{24}{5} =$ no entero

Caso no posible

---

43 $n = 21$
al al
51 $n = 29$

Casos no posibles

---

52 $\boxed{1\,P_3 + 2\,P_6}$ $\quad P_3\ (a = 3;\ n_a = 1) \quad P_6\ (b = 6;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 6 \times 1) + 3 \times 6 \times (2 - 1 - 2) = 6$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 6 : 6 = 12$

(VIII) $C_3 = 4 \times 6 \times 1 : 6 = 4$
(IX) $C_6 = 4 \times 3 \times 2 : 6 = 4$ $\Big\}\ C = 4 + 4 = 8 \quad V = 12 \quad A = 18$

Caso posible

UNE A4 210 X 297

53 $\boxed{1P_3 + 1P_6 + 1P_n \quad 6 < n < \infty}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_6\ (b=6;\ n_b=1)$ $P_n\ (c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times 3\times 6\times 1 + 2n\times(3\times 1 + 6\times 1) + 3\times 6\times n\times(2-1-1-1) = 36$

(II) $V = 4\times 3\times 6\times n : 36 = 2n$

(III) $C_3 = 4\times 6\times n\times 1 : 36 = \frac{2}{3}n$

(IV) $C_6 = 4\times 3\times n\times 1 : 36 = \frac{1}{3}n$ $\Big\}$ $C = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n + 2 = n+2$ $\quad V = 2n$

(V) $C_n = 4\times 3\times 6\times 1 : 36 = 2$ $\quad A = 3n$

Caso posible

Los valores de n que sólo darán números enteros en C_3 y C_4 son los de $n = 9, 12, 15, 18 \ldots 3p$ $(p>2$ y entero$)$.

En este caso, y con los valores restringidos de n, existirán infinitas soluciones.

---

54 $\boxed{1P_3 + 2P_7}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_7\ (b=7;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times 2 + 7\times 1) + 3\times 7\times(2-1-2) = 5$

(VII) $V = 4\times 3\times 7 : 5 = \frac{84}{5}$ = no entero

Caso no posible

---

55 al 88 $\boxed{1P_3 + 1P_7 + 1P_n \quad 7 < n < 42}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_7\ (b=7;\ n_b=1)$ $P_n\ (c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times 3\times 7\times 1 + 2n\times(3\times 1 + 7\times 1) + 3\times 7\times n\times(2-1-1-1) = 42-n$

(II) $V = 4\times 3\times 7\times n : (42-n) = \frac{84n}{42-n}$

Siendo $7 < n < 42$, V es sólo entero para los valores de "n" siguientes: 14, 18, 21, 24, 28, 30, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41.

UNE A4 210 X 297

Teniendo en cuenta la fórmula V, (independiente de $c=n$) podremos reducir las posibles soluciones anteriores a

$$(V) \qquad C_n = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : (42-n) = \frac{84}{42-n}$$ y siendo $84 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$

cuyos múltiplos son 1, 2, 4, 6, 7, 12, 21, 28, las soluciones enteras de C_n se obtendrán con los valores de $n = 41, 40, 38, 36, 35, 30, 21, 14$, que son tan sólo los que ensayaremos a continuación con las fórmulas III y IV.

---

55 a 60 $n = 8$ a $n = 13$ — Casos no posibles

---

61 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{14} \quad n = 14}$ $\Delta = 42 - 14 = 28$ $V = \frac{84 \times 14}{42-14} = 42$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 14 \times 1 : 28 = 14$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 14 \times 1 : 28 = 6$

(V) $C_{14} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 28 = 3$

$C = 14 + 6 + 3 = 23$ $V = 42$ $A = 63$

Caso posible

---

62 a 67 $n = 15$ a $n = 20$ — Casos no posibles

---

68 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{21} \quad n = 21}$ $\Delta = 42 - 21 = 21$ $V = \frac{84 \times 21}{42-21} = 84$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 21 \times 1 : 21 = 28$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 21 \times 1 : 21 = 12$

(V) $C_{21} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 21 = 4$ } $C = 28 + 12 + 4 = 44$ $V = 84$ $A = 126$

Caso posible

---

69 $n = 22$

al al

76 $n = 29$

Casos no posibles

---

77 $1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{30}$, $n = 30$ $\Delta = 42 - 30 = 12$ $V = \frac{84 \times 30}{42 - 30} = 210$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 30 \times 1 : 12 = 70$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 30 \times 1 : 12 = 30$ } $C = 70 + 30 + 7 = 107$ $V = 210$ $A = 315$

(V) $C_{30} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 12 = 7$

Caso posible

---

78 $n = 31$

al al

81 $n = 34$

Casos no posibles

---

82 $1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{35}$, $n = 35$ $\Delta = 42 - 35 = 7$ $V = \frac{84 \times 35}{42 - 35} = 420$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 35 \times 1 : 7 = 140$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 35 \times 1 : 7 = 60$ } $C = 140 + 60 + 12 = 212$ $V = 420$ $A = 630$

(V) $C_{35} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 7 = 12$

Caso posible

---

83 $1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{36}$, $n = 36$ $\Delta = 42 - 36 = 6$ $V = \frac{84 \times 36}{42 - 36} = 504$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 36 \times 1 : 6 = 168$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 36 \times 1 : 6 = 72$ } $C = 168 + 72 + 14 = 254$ $V = 504$ $A = 756$

(V) $C_{36} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 6 = 14$

Caso posible

---

84 $n = 37$ Caso no posible

---

85 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{38} \quad n = 38}$ $\Delta = 42 - 38 = 4$ $V = \frac{84 \times 38}{42 - 38} = 798$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 38 \times 1 : 4 = 266$
(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 38 \times 1 : 4 = 114$
(V) $C_{38} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 4 = 21$
$C = 266 + 114 + 21 = 401$ $V = 798$ $A = 1197$

Caso posible

---

86 $n = 39$ Caso no posible

---

87 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{40} \quad n = 40}$ $\Delta = 42 - 40 = 2$ $V = \frac{84 \times 40}{42 - 40} = 1680$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 40 \times 1 : 2 = 560$
(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 40 \times 1 : 2 = 240$
(V) $C_{40} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 2 = 42$
$C = 560 + 240 + 42 = 842$ $V = 1680$ $A = 2520$

Caso posible

---

88 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{41} \quad n = 41}$ $\Delta = 42 - 41 = 1$ $V = \frac{84 \times 41}{42 - 41} = 3444$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 41 \times 1 : 1 = 1148$
(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 41 \times 1 : 1 = 492$
(V) $C_{41} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 1 = 84$

$C = 1148 + 492 + 84 = 1724$ $V = 3444$ $A = 5166$

Caso posible

---

89 $\boxed{1\,P_3 + 2\,P_8}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $P_8\ (b = 8;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 8 \times 1) + 3 \times 8 \times (2 - 1 - 2) = 4$

UNE A4 210 X 297

(VIII) $C_3 = 4 \times 8 \times 1 : 4 = 8$

(IX) $C_8 = 4 \times 3 \times 2 : 4 = 6$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 8 : 4 = 24$

$C = 8+6 = 14$ $\quad V = 24$ $\quad A = 36$

Caso posible

---

90 al 104

$\boxed{1\ P_3 + 1\ P_8 + 1\ P_n \qquad 8 < n < 24}$ $\quad P_3\,(a=3;\ n_a=1)$ $\quad P_8\,(b=8;\ n_b=1)$ $\quad P_n\,(c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 8 \times 1 + 2n \times (3 \times 1 + 8 \times 1) + 3 \times 8 \times n \times (2 - 1 - 1 - 1) = 48 - 2n$

(II) $V = 4 \times 3 \times 8 \times n : (48 - 2n) = \dfrac{48\,n}{24 - n}$

(V) $C_n = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : (48 - 2n) = \dfrac{48}{24 - n}$

En esta última fórmula se tiene que $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ cuyos múltiplos son: 2, 4, 6, 8, 12; las soluciones enteras de C_n se obtendrán con los valores de $n = 22, 20, 18, 16, 12$, que son los que ensayaremos a continuación en las fórmulas III y IV, teniendo en cuenta la limitación $8 < n < 24$.

---

90 al 92 $\quad n = 9$ al $n = 11$

Caso no posible

---

93 $\quad \boxed{1\ P_3 + 1\ P_8 + 1\ P_{12} \qquad n = 12}$ $\quad \Delta = 48 - 2 \times 12 = 24$ $\quad V = \dfrac{48 \times 12}{24 - 12} = 48$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 12 \times 1 : 24 = 16$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 12 \times 1 : 24 = 6$

(V) $C_{12} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 24 = 4$

$C = 16+6+4 = 26$ $\quad V = 48$ $\quad A = 72$

Caso posible

UNE A4 210 X 297

94 $n = 13$

al al

96 $n = 15$ — Caso no posible

97 $1P_3 + 1P_8 + 1P_{16}$, $n = 16$ $\quad \Delta = 48 - 2 \times 16 = 16 \quad V = \frac{48 \times 16}{24 - 16} = 96$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 16 \times 1 : 16 = 32$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 16 \times 1 : 16 = 12$ $\quad C = 32 + 12 + 6 = 50 \quad V = 96 \quad A = 144$

(V) $C_{16} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 16 = 6$

Caso posible

98 $n = 17$ — Caso no posible

99 $1P_3 + 1P_8 + 1P_{18}$, $n = 18$ $\quad \Delta = 48 - 2 \times 18 = 12 \quad V = \frac{48 \times 18}{24 - 18} = 144$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 18 \times 1 : 12 = 48$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 18 \times 1 : 12 = 18$ $\quad C = 48 + 18 + 8 = 74 \quad V = 144 \quad A = 216$

(V) $C_{18} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 12 = 8$

Caso posible

100 $n = 19$ — Caso no posible

101 $1P_3 + 1P_8 + 1P_{20}$, $n = 20$ $\quad \Delta = 48 - 2 \times 20 = 8 \quad V = \frac{48 \times 20}{24 - 20} = 240$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 20 \times 1 : 8 = 80$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 20 \times 1 : 8 = 30$ $\quad C = 80 + 30 + 12 = 122 \quad V = 240 \quad A = 360$

(V) $C_{20} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 8 = 12$

Caso posible

UNE A4 210 x 297

102 $n = 21$ Caso no posible

---

103 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_8 + 1\,P_{22}}$ $\quad n = 22$

$\Delta = 48 - 2 \times 22 = 4$ $\qquad V = \dfrac{48 \times 22}{24 - 22} = 528$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 22 \times 1 : 4 = 176$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 22 \times 1 : 4 = 66$

(V) $C_{22} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 4 = 24$

$C = 176 + 66 + 24 = 266$ $\quad V = 528$ $\quad A = 792$

Caso posible

---

104 $n = 23$ Caso no posible

---

105 $\boxed{1\,P_3 + 2\,P_9}$ $\qquad P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $\qquad P_9\ (b = 9;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 9 \times 1) + 3 \times 9 \times (2 - 1 - 2) = 3$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 9 : 3 = 36$

(VIII) $C_3 = 4 \times 9 \times 1 : 3 = 12$

(IX) $C_9 = 4 \times 3 \times 2 : 3 = 8$

$C = 12 + 8 = 20$ $\quad V = 36$ $\quad A = 54$

Caso posible

---

106 al 113 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_9 + 1\,P_n \qquad 9 < n < 18}$ $\qquad P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $\qquad P_9\ (b = 9;\ n_b = 1)$ $\qquad P_n\ (c = n;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 9 \times 1 + 2n \times (3 \times 1 + 9 \times 1) + 3 \times 9 \times n \times (2 - 1 - 1 - 1) = 54 - 3n$

(II) $V = 4 \times 3 \times 9 \times n : (54 - 3n) = \dfrac{108\,n}{54 - 3n}$

(V) $C_n = 4 \times 3 \times 9 \times 1 : (54 - 3n) = \dfrac{108}{54 - 3n}$

En esta última fórmula se tiene que $108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

UNE A4 210 X 297

cuyos múltiplos son: 2, 4, 6, 12, 18, 27, 36, 54; las soluciones enteras de C_n se obtendrán con los valores de $n = 16, 14, 12, 9, 6$, que son los que ensayaremos a continuación en las fórmulas III y IV., teniendo en cuenta la limitación

$9 < n < 18$

---

106 y 107 $n = 10$ y $n = 11$ Caso no posible

---

108 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_9 + 1\,P_{12} \quad n = 12}$ $\Delta = 54 - 3 \times 12 = 18$ $V = \frac{108 \times 12}{54 - 3 \times 12} = 72$

(III) $C_3 = 4 \times 9 \times 12 \times 1 : 18 = 24$

(IV) $C_9 = 4 \times 3 \times 12 \times 1 : 18 = 8$

(V) $C_{12} = 4 \times 3 \times 9 \times 1 : 18 = 6$

$C = 24 + 8 + 6 = 38$ $V = 72$ $A = 108$ Caso posible

---

109 $n = 13$ Caso no posible

---

110 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_9 + 1\,P_{14} \quad n = 14}$ $\Delta = 54 - 3 \times 14 = 12$ $V = \frac{108 \times 14}{54 - 3 \times 14} = 126$

(III) $C_3 = 4 \times 9 \times 14 \times 1 : 12 = 42$

(IV) $C_9 = 4 \times 3 \times 14 \times 1 : 12 = 14$

(V) $C_{14} = 4 \times 3 \times 9 \times 1 : 12 = 9$

$C = 42 + 14 + 9 = 65$ $V = 126$ $A = 189$ Caso posible

---

111 $n = 15$ Caso no posible

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 41 al 50

EUITIS
BIBLIOTECA

112 | $1\,P_3 + 1\,P_9 + 1\,P_{16}$, $h = 16$ | $\Delta = 54 - 3\times 16 = 6$ | $V = \dfrac{108\times 16}{54-3\times 16} = 288$

(III) $C_3 = 4\times 9\times 16\times 1 : 6 = 96$

(IV) $C_9 = 4\times 3\times 16\times 1 : 6 = 32$

(V) $C_{16} = 4\times 3\times 9\times 1 : 6 = 18$

$C = 96 + 32 + 18 = 146$ $V = 288$ $A = 432$

Caso posible

---

113 $n = 17$

Caso no posible

---

114 | $1\,P_3 + 2\,P_{10}$ | $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_{10}\ (b=10;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times 2 + 10\times 1) + 3\times 10\times(2-1-2) = 2$

(VII) $V = 4\times 3\times 10 : 2 = 60$

(VIII) $C_3 = 4\times 10\times 1 : 2 = 20$

(IX) $C_{10} = 4\times 3\times 2 : 2 = 12$

$C = 20 + 12 = 32$ $V = 60$ $A = 90$

Caso posible

---

115 a 118 | $1\,P_3 + 1\,P_{10} + 1\,P_n$, $10 < n < 15$ | $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_{10}\ (b=10;\ n_b=1)$ $P_n\ (c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times 3\times 10\times 1 + 2n\times(3\times 1 + 10\times 1) + 3\times 10\times n\times(2-1-1-1) = 60 - 4n$

(V) $C_n = 4\times 3\times 10\times 1 : (60-4n) = \dfrac{120}{60-4n}$

En esta última fórmula, y teniendo en cuenta la limitación $10 < n < 15$, para que sea entera, "n" debe ser 12, 13 ó 14.

---

115 $n = 11$

Caso no posible

UNE A4 210 X 297

116 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_{10} + 1\,P_{12} \quad n = 12}$ $\Delta = 60 - 4 \times 12 = 12$

(I) $V = 4 \times 3 \times 10 \times 12 : 12 = 120.$

(II) $C_3 = 4 \times 10 \times 12 \times 1 : 12 = 40$

(III) $C_{10} = 4 \times 3 \times 12 \times 1 : 12 = 12$ $\Big\}$ $C = 40 + 12 + 10 = 62$ $V = 120$ $A = 180$

(V) $C_{12} = 4 \times 3 \times 10 \times 1 : 12 = 10$

Caso posible

---

117 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_{10} + 1\,P_{13} \quad n = 13}$ $\Delta = 60 - 4 \times 13 = 8$

(II) $V = 4 \times 3 \times 10 \times 13 : 8 = 195$

(III) $C_3 = 4 \times 10 \times 13 \times 1 : 8 = 65$ Caso no posible

(IV) $C_{10} = 4 \times 3 \times 13 \times 1 : 8 = \frac{39}{2}$ = no entero

---

118 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_{10} + 1\,P_{14} \quad n = 14}$ $\Delta = 60 - 4 \times 14 = 4$

(II) $V = 4 \times 3 \times 10 \times 14 : 4 = 420$

(III) $C_3 = 4 \times 10 \times 14 \times 1 : 4 = 140$

(IV) $C_{10} = 4 \times 3 \times 14 \times 1 : 4 = 42$ $\Big\}$ $C = 140 + 42 + 30 = 212$ $V = 420$ $A = 630$

(V) $C_{14} = 4 \times 3 \times 10 \times 1 : 4 = 30$

Caso posible

---

119 $\boxed{1\,P_3 + 2\,P_{11}}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $P_{11}\ (b = 11;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 11 \times 1) + 3 \times 11 \times (2 - 1 - 2) = 1$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 11 : 1 = 132$

(VIII) $C_3 = 4 \times 11 \times 1 : 1 = 44$
(IX) $C_{11} = 4 \times 3 \times 2 : 1 = 24$
$C = 44 + 24 = 68$ $V = 132$ $A = 198$
Caso posible

---

120 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_{11} + 1\,P_{12}}$ $P_3\,(a=3;\ n_a=1)$ $P_{11}\,(b=11;\ n_b=1)$ $P_{12}\,(c=12;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 11 \times 1 + 2 \times 12 \times (3 \times 1 + 11 \times 1) + 3 \times 11 \times 12 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 6$

(II) $V = 4 \times 3 \times 11 \times 12 : 6 = 264$

(III) $C_3 = 4 \times 11 \times 12 \times 1 : 6 = 88$
(IV) $C_{11} = 4 \times 3 \times 12 \times 1 : 6 = 24$
(V) $C_{12} = 4 \times 3 \times 11 \times 1 : 6 = 22$
$C = 88 + 24 + 22 = 134$ $V = 264$ $A = 396$
Caso posible

---

121 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_{11} + 1\,P_{13}}$ $P_3\,(a=3;\ n_a=1)$ $P_{11}\,(b=11;\ n_b=1)$ $P_{13}\,(c=13;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 11 \times 1 + 2 \times 13 \times (3 \times 1 + 11 \times 1) + 3 \times 11 \times 13 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 1$

(II) $V = 4 \times 3 \times 11 \times 13 : 1 = 1716$

(III) $C_3 = 4 \times 11 \times 13 \times 1 : 1 = 572$
(IV) $C_{11} = 4 \times 3 \times 13 \times 1 : 1 = 156$
(V) $C_{13} = 4 \times 3 \times 11 \times 1 : 1 = 132$
$C = 572 + 156 + 132 = 860$ $V = 1716$ $A = 2574$
Caso posible

---

122 $\boxed{\begin{array}{l} 2\,P_4 + 1\,P_n \\ 4 < n < \infty \end{array}}$ $P_4\,(a=4;\ n_a=2)$ $P_n\,(b=n;\ n_b=1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (4 \times 1 + n \times 2) + 4n \times (2 - 2 - 1) = 8$

(VII) $V = 4 \times 4 \times n : 8 = 2n$

(VIII) $C_4 = 4 \times n \times 2 : 8 = n$
(IX) $C_n = 4 \times 4 \times 1 : 8 = 2$
$C = n + 2$ $V = 2n$ $A = 3n$

Infinitas soluciones
Caso posible

UNE A4 210 X 297

123 | $1\ P_4 + 2\ P_5$ | $P_4\ (a=4;\ n_a=1)$ $P_5\ (b=5;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(4\times2+5\times1)+4\times5\times(2-1-2) = 6$

(VII) $C_4 = 4\times5\times1:6 = \frac{10}{3}$ = no entero — Caso no posible

---

124 al 137 | $1\ P_4 + 1\ P_5 + 1\ P_n$, $5<n<20$ | $P_4\ (a=4;\ n_a=1)$ $P_5\ (b=5;\ n_b=1)$ $P_n\ (c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times4\times5\times1+2n\times(4\times1+5\times1)+4\times5\times n\times(2-1-1-1) = 40-2n$

(V) $C_n = 4\times4\times5\times1:(40-2n) = \frac{40}{20-n}$

En esta última fórmula, y teniendo en cuenta la limitación $5<n<20$, para que sea entera, "n" debe ser 10, 12, 15, 16, 18, 19, que son los valores que ensayamos a continuación en las fórmulas II, III y IV.

---

124 al 127 | $n=6$ al $n=9$ — Casos no posibles

---

128 | $1\ P_4 + 1\ P_5 + 1\ P_{10}$, $n=10$ | $\Delta = 40-2\times10 = 20$

(II) $V = 4\times4\times5\times10:20 = 40$

(III) $C_4 = 4\times5\times10\times1:20 = 10$

(IV) $C_5 = 4\times4\times10\times1:20 = 8$

(V) $C_{10} = 4\times4\times5\times1:20 = 4$

$C = 10+8+4 = 22$ $V = 40$ $A = 60$

Caso posible

---

129 $n=11$ — Caso no posible

UNE A4 210 X 297

130 $\boxed{1\,P_4 + 1\,P_5 + 1\,P_{12}}$ $n = 12$ $\quad \Delta = 40 - 2 \times 12 = 16$ ✓

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 12 : 16 = 60$ ✓

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 12 \times 1 : 16 = 15$ ✓

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 12 \times 1 : 16 = 12$ ✓ $\quad C = 15 + 12 + 5 = 32 \quad V = 60 \quad A = 90$

(V) $C_{12} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 16 = 5$ ✓

Caso prisma

---

131 $n = 13$

y Caso no posible

132 $n = 14$

---

133 $\boxed{1\,P_4 + 1\,P_5 + 1\,P_{15}}$ $n = 15$ $\quad \Delta = 40 - 2 \times 15 = 10$

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 15 : 10 = 120$

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 15 \times 1 : 10 = 30$ ✓

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 15 \times 1 : 10 = 24$ ✓ $\quad C = 30 + 24 + 8 = 62 \quad V = 120 \quad A = 180$

(V) $C_{15} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 10 = 8$ ✓

Caso prisma

---

134 $\boxed{1\,P_4 + 1\,P_5 + 1\,P_{16}}$ $n = 16$ $\quad \Delta = 40 - 2 \times 16 = 8$

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 16 : 8 = 160$

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 16 \times 1 : 8 = 40$ ✓

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 16 \times 1 : 8 = 32$ ✓ $\quad C = 40 + 32 + 10 = 82 \quad V = 160 \quad A = 240$

(V) $C_{16} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 8 = 10$ ✓

Caso prisma

---

135 $n = 17$ Caso no posible

---

136 $\boxed{1P_4 + 1P_5 + 1P_{18} \quad n = 18}$ $\Delta = 40 - 2\times 18 = 4$

(II) $V = 4\times 4\times 5\times 18 : 4 = 360$

(III) $C_4 = 4\times 5\times 18\times 1 : 4 = 90$

(IV) $C_5 = 4\times 4\times 18\times 1 : 4 = 72$ $\Big\}$ $C = 90 + 72 + 20 = 182$ $V = 360$ $A = 540$

(V) $C_{18} = 4\times 4\times 5\times 1 : 4 = 20$

Caso posible

---

137 $\boxed{1P_4 + 1P_5 + 1P_{19} \quad n = 19}$ $\Delta = 40 - 2\times 19 = 2$

(II) $V = 4\times 4\times 5\times 19 : 2 = 760$

(III) $C_4 = 4\times 5\times 19\times 1 : 2 = 190$

(IV) $C_5 = 4\times 4\times 19\times 1 : 2 = 152$ $\Big\}$ $C = 190 + 152 + 40 = 382$ $V = 760$ $A = 1140$

(V) $C_{19} = 4\times 4\times 5\times 1 : 2 = 40$

Caso posible

---

138 $\boxed{1P_4 + 2P_6}$ $P_4\ (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_6\ (b = 6;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(4\times 2 + 6\times 1) + 4\times 6\times(2 - 1 - 2) = 4$

(VII) $V = 4\times 4\times 6 : 4 = 24$

(VIII) $C_4 = 4\times 6\times 1 : 4 = 6$ $\Big\}$ $C = 6 + 8 = 14$ $V = 24$ $A = 36$

(IX) $C_6 = 4\times 4\times 2 : 4 = 8$

Caso posible

---

139 al 143 $\boxed{1P_4 + 1P_6 + 1P_n \quad 6 < n < 12}$ $P_4\ (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_6\ (b = 6;\ n_b = 1)$ $P_n\ (c = n;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 4 \times 6 \times 1 + 2n \times (4 \times 1 + 6 \times 1) + 4 \times 6 \times n \times (2 - 1 - 1 - 1) = 48 - 4n$

(V) $C_n = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : (48 - 4n) = \frac{24}{12 - n}$

En esta última fórmula, y teniendo en cuenta la limitación $6 < n < 12$, para que sea entera, "n" debe ser 8, 9, 10, 11, que son los valores que ensayamos a continuación en las fórmulas II, III, IV y V

---

139 $n = 7$ Caso no posible

---

140 $\boxed{1\,P_4 + 1\,P_6 + 1\,P_8 \quad n = 8}$ $P_4\,(a = 4;\ n_a = 1)$ $P_6\,(b = 6;\ n_b = 1)$ $P_8\,(c = 8;\ n_c = 1)$

$\Delta = 48 - 4 \times 8 = 16$

(II) $V = 4 \times 4 \times 6 \times 8 : 16 = 48$

(III) $C_4 = 4 \times 6 \times 8 \times 1 : 16 = 12$

(IV) $C_6 = 4 \times 4 \times 8 \times 1 : 16 = 8$

(V) $C_8 = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 16 = 6$

$C = 12 + 8 + 6 = 26 \quad V = 48 \quad A = 72$

Caso posible

---

141 $\boxed{1\,P_4 + 1\,P_6 + 1\,P_9 \quad n = 9}$ $\Delta = 48 - 4 \times 9 = 12$

(II) $V = 4 \times 4 \times 6 \times 9 : 12 = 72$

(III) $C_4 = 4 \times 6 \times 9 \times 1 : 12 = 18$

(IV) $C_6 = 4 \times 4 \times 9 \times 1 : 12 = 12$

(V) $C_9 = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 12 = 8$

$C = 18 + 12 + 8 = 38 \quad V = 72 \quad A = 108$

Caso posible

UNE A4 210 X 297

142 $\boxed{1P_4 + 1P_6 + 1P_{10} \quad n = 10}$ $\Delta = 48 - 4 \times 10 = 8$

(II) $V = 4 \times 4 \times 6 \times 10 : 8 = 120$

(III) $C_4 = 4 \times 6 \times 10 \times 1 : 8 = 30$

(IV) $C_6 = 4 \times 4 \times 10 \times 1 : 8 = 20$

(V) $C_{10} = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 8 = 12$

$C = 30 + 20 + 12 = 62$ $V = 120$ $A = 180$

Caso posible

---

143 $\boxed{1P_4 + 1P_6 + 1P_{11} \quad n = 11}$ $\Delta = 48 - 4 \times 11 = 4$

(II) $V = 4 \times 4 \times 6 \times 11 : 4 = 264$

(III) $C_4 = 4 \times 6 \times 11 \times 1 : 4 = 66$

(IV) $C_6 = 4 \times 4 \times 11 \times 1 : 4 = 44$

(V) $C_{11} = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 4 = 24$

$C = 66 + 44 + 24 = 134$ $V = 264$ $A = 396$

Caso posible

---

144 $\boxed{1P_4 + 2P_7}$ $P_4 (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_7 (b = 7;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (4 \times 2 + 7 \times 1) + 4 \times 7 \times (2 - 1 - 2) = 2$

(VII) $V = 4 \times 4 \times 7 : 2 = 56$

(VIII) $C_4 = 4 \times 7 \times 1 : 2 = 14$

(IX) $C_7 = 4 \times 4 \times 2 : 2 = 16$

$C = 14 + 16 = 30$ $V = 56$ $A = 84$

Caso posible

---

145 $\boxed{1P_4 + 1P_7 + 1P_8}$ $P_4 (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_7 (b = 7;\ n_b = 1)$ $P_8 (c = 8;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 4 \times 7 \times 1 + 2 \times 8 \times (4 \times 1 + 7 \times 1) + 4 \times 7 \times 8 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 8$

(II) $V = 4 \times 4 \times 7 \times 8 : 8 = 112$

(III) $C_4 = 4 \times 7 \times 8 \times 1 : 8 = 28$

UNE A4 210 X 297

(IV) $C_7 = 4 \times 4 \times 8 \times 1 : 8 = 16$

(V) $C_8 = 4 \times 4 \times 7 \times 1 : 8 = 14$

$C = 28 + 16 + 14 = 58 \quad V = 112 \quad A = 168$

Caso posible

---

146 $\boxed{1\,P_4 + 1\,P_7 + 1\,P_9}$ $P_4\,(a=4;\ n_a=1)$ $P_7\,(b=7;\ n_b=1)$ $P_9\,(c=9;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2 \times 4 \times 7 \times 1 + 2 \times 9 \times (4 \times 1 + 7 \times 1) + 4 \times 7 \times 9 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 2$

(II) $V = 4 \times 4 \times 7 \times 9 : 2 = 504$

(III) $C_4 = 4 \times 7 \times 9 \times 1 : 2 = 126$

(IV) $C_7 = 4 \times 4 \times 9 \times 1 : 2 = 72$

(V) $C_9 = 4 \times 4 \times 7 \times 1 : 2 = 56$

$C = 126 + 72 + 56 = 254 \quad V = 504 \quad A = 756$

Caso posible

---

147 a 150 $\boxed{2\,P_5 + 1\,P_n \quad 5 < n < 10}$ $P_5\,(a=5;\ n_a=2)$ $P_n\,(b=n;\ n_b=1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (5 \times 1 + n \times 2) + 5n \times (2 - 2 - 1) = 10 - n$

(IX) $C_n = 4 \times 5 \times 1 : (10 - n) = \dfrac{20}{10 - n}$

En esta última fórmula, y teniendo en cuenta la limitación $5 < n < 10$, para que sea entera, "n" debe ser 6, 8, 9, que son los valores que ensayamos a continuación en las fórmulas VII, VIII y IX

---

147 $\boxed{2\,P_5 + 1\,P_6 \quad n=6}$ $\Delta' = 10 - 6 = 4$

(VII) $V = 4 \times 5 \times 6 : 4 = 30$

(VIII) $C_5 = 4 \times 6 \times 2 : 4 = 12$

(IX) $C_6 = 4 \times 5 \times 1 : 4 = 5$

$C = 12 + 5 = 17 \quad V = 30 \quad A = 45$

Caso posible

UNE A4 210 X 297

148 $n = 7$ Caso no posible

149 $\boxed{2\,P_5 + 1\,P_8 \quad n=8}$ $\Delta' = 10 - 8 = 2$

(VII) $V = 4 \times 5 \times 8 : 2 = 80$

(VIII) $C_5 = 4 \times 8 \times 2 : 2 = 32$

(IX) $C_8 = 4 \times 5 \times 1 : 2 = 10$

$C = 32 + 10 = 42$ $V = 80$ $A = 120$

Caso posible

150 $\boxed{2\,P_5 + 1\,P_9 \quad n=9}$ $\Delta' = 10 - 9 = 1$

(VII) $V = 4 \times 5 \times 9 : 1 = 180$

(VIII) $C_5 = 4 \times 9 \times 2 : 1 = 72$

(IX) $C_9 = 4 \times 5 \times 1 : 1 = 20$

$C = 72 + 20 = 92$ $V = 180$ $A = 270$

Caso posible

151 $\boxed{1\,P_5 + 2\,P_6}$ $P_5\ (a=5;\ n_a=1)$ $P_6\ (b=6;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (5 \times 2 + 6 \times 1) + 5 \times 6 \cdot (2 - 1 - 2) = 2$

(VII) $V = 4 \times 5 \times 6 : 2 = 60$

(VIII) $C_5 = 4 \times 6 \times 1 : 2 = 12$

(IX) $C_6 = 4 \times 5 \times 2 : 2 = 20$

$C = 12 + 20 = 32$ $V = 60$ $A = 90$

Caso posible

152 $\boxed{1\,P_5 + 1\,P_6 + 1\,P_7}$ $P_5\ (a=5;\ n_a=1)$ $P_6\ (b=6;\ n_b=1)$ $P_7\ (c=7;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2 \times 5 \times 6 \times 1 + 2 \times 7 \times (5 \times 1 + 6 \times 1) + 5 \times 6 \times 7 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 4$

(II) $V = 4 \times 5 \times 6 \times 7 : 4 = 210$

(III) $C_5 = 4 \times 6 \times 7 \times 1 : 4 = 42$

(IV) $C_6 = 4 \times 5 \times 7 \times 1 : 4 = 35$

(V) $C_7 = 4 \times 5 \times 6 \times 1 : 4 = 30$

$C = 42 + 35 + 30 = 107$ $V = 210$ $A = 315$

Caso posible

UNE A4 210 x 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 51 al 60

2.6 Resumen general de los casos posibles de poliedros arquimedianos que cumplen las condiciones 1ª a 5ª

Como resumen del estudio de los casos posibles de poliedros arquimedianos cuyos ángulos sólidos estén formados por caras regulares y sean a su vez soluciones enteras de las relaciones métricas que han de cumplir el número de sus caras, vértices y aristas, deducidas en el párrafo 2.4 (5ª condición), obtenemos los siguientes resultados

A Con cinco caras regulares, no todas iguales.

			Soluciones	Totales
(VII)	Caso 1	$4P_3 + 1P_4$	1	
(XIII)	" 2	$4P_3 + 1P_5$	1	2

B Con cuatro caras regulares, no todas iguales.

	Caso 3	$3P_3 + 1P_n \quad (3 < n < \infty)$	∞
(III)	" 4	$2P_3 + 2P_4$	1
	" 6	$2P_3 + 1P_4 + 1P_6$	1
	" 8	$2P_3 + 1P_4 + 1P_8$	1
	" 9	$2P_3 + 1P_4 + 1P_9$	1
	" 10	$2P_3 + 1P_4 + 1P_{10}$	1
	" 11	$2P_3 + 1P_4 + 1P_{11}$	1
(IX)	" 12	$2P_3 + 2P_5$	1
	" 13	$2P_3 + 1P_5 + 1P_6$	1
		sumas y sigue	9

2

UNE A4 210 X 297

			Soluciones	Totales
	sumas anteriores		9	2
	Caso 14	$2P_3 + 1P_5 + 1P_7$	1	
V	" 15	$1P_3 + 3P_4$	1	
XI	" 16	$1P_3 + 2P_4 + 1P_5$	1	12

c Con tres caras regulares, no todas iguales.

EUITIS BIBLIOTECA

	Caso 19	$1P_3 + 2P_4$	1	incluido en 122
I	" 52	$1P_3 + 2P_6$	1	
	" 53	$1P_3 + 1P_6 + 1P_n$ $(6<n<\infty)$	∞ .	
	" 61	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{14}$	1 .	
	" 68	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{21}$	1 .	
	" 77	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{30}$	1 .	
	" 82	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{35}$	1 .	
	" 83	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{36}$	1 .	
	" 85	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{38}$	1 .	
	" 87	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{40}$	1 .	
	" 88	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{41}$	1 .	
II	" 89	$1P_3 + 2P_8$	1	
	" 93	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{12}$	1 .	
	" 97	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{16}$	1 .	
	" 99	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{18}$	1 .	
	" 101	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{20}$	1 .	
	" 103	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{22}$	1 .	
	sumas y sigue		17	14

UNE A4 210 X 297

			soluciones	Totales
		sumas anteriores	17	14
	Caso 105	$1P_3 + 2P_9$	1	
	" 108	$1P_3 + 1P_9 + 1P_{12}$	1 .	
	" 110	$1P_3 + 1P_9 + 1P_{14}$	1 .	
	" 112	$1P_3 + 1P_9 + 1P_{16}$	1 .	
VIII	" 114	$1P_3 + 2P_{10}$	1	
	" 116	$1P_3 + 1P_{10} + 1P_{12}$	1 .	
	" 118	$1P_3 + 1P_{10} + 1P_{14}$	1 .	
	" 119	$1P_3 + 2P_{11}$	1	
	" 120	$1P_3 + 1P_{11} + 1P_{12}$	1 .	
	" 121	$1P_3 + 1P_{11} + 1P_{13}$	1 .	
	" 122	$2P_4 + 1P_n \quad (2 < n < \infty)$	∞	
	" 128	$1P_4 + 1P_5 + 1P_{10}$	1 .	
	" 130	$1P_4 + 1P_5 + 1P_{12}$.	1 .	
	" 133	$1P_4 + 1P_5 + 1P_{15}$	1 .	
	" 134	$1P_4 + 1P_5 + 1P_{16}$	1 .	
	" 136	$1P_4 + 1P_5 + 1P_{18}$	1 .	
	" 137	$1P_4 + 1P_5 + 1P_{19}$	1 .	
IV	" 138	$1P_4 + 2P_6$	1	
VI	" 140	$1P_4 + 1P_6 + 1P_8$	1	
	" 141	$1P_4 + 1P_6 + 1P_9$	1 .	
XII	" 142	$1P_4 + 1P_6 + 1P_{10}$	1	
	" 143	$1P_4 + 1P_6 + 1P_{11}$	1 .	
	" 144	$1P_4 + 2P_7$	1	
		sumas y sigue	40	14

UNE A4 210 X 297

			Soluciones	Totales
		sumas anteriores	40	14
Caso	145	$1P_4 + 1P_7 + 1P_8$	1 ·	
"	146	$1P_4 + 1P_7 + 1P_9$	1 ·	
"	147	$2P_5 + 1P_6$	1	
"	149	$2P_5 + 1P_8$	1	
"	150	$2P_5 + 1P_9$	1	
(X) "	151	$1P_5 + 2P_6$	1	
"	152	$1P_5 + 1P_6 + 1P_7$	1 ·	47
		Total casos posibles		61

Los 61 casos de este resumen limitan considerablemente el número de soluciones diferentes de posibles poliedros arquimedianos, aún cuando en algunos casos puedan ser infinitos (casos 3, 53 y 122).

Todos ellos cumplen las condiciones necesarias ya estudiadas en los párrafos 2.1. (1ª y 2ª condición), 2.2 (3ª y 4ª id) y 2.4 (5ª id.) que resumimos a continuación:

A) Condiciones de magnitud

1ª Condición.- La suma de los ángulos planos internos de las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo (arquimediano) en cada uno de sus vértices, tiene que ser menor de cuatro rectos.

2ª Condición.- El mayor ángulo plano interno de todas

UNE A4 210 X 297

las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo (arquimediano), ha de ser menor que la suma de los ángulos planos interiores de las caras restantes.

B) Condiciones de existencia

3ª Condición.- El ángulo sólido de un poliedro arquimediano sólo puede ser triedro, tetraedro o pentaedro.

4ª Condición.- En el ángulo sólido de un poliedro arquimediano sólo existirán como máximo tres caras o polígonos regulares distintos.

C) Condiciones métricas

5ª Condición.- El número de caras, vértices y aristas de todo poliedro arquimediano, han de ser soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

a) Para el caso de que en cada uno de sus vértices concurran tres caras regulares diferentes de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ y $\widehat{c}$ lados respectivamente, siendo $\widehat{n_a}$, $\widehat{n_b}$ y $\widehat{n_c}$ el número de cada una de ellas:

$$\Delta = 2ab\,n_c + 2c\,(a\,n_b + b\,n_a) + abc\,(2 - n_a - n_b - n_c) \qquad (I)$$

UNE A4 210 X 297

$$V = 4abc : \Delta \qquad (II)$$

$$C_a = 4bc\,n_a : \Delta \qquad (III)$$

$$C_b = 4ac\,n_n : \Delta, \qquad (IV)$$

$$C_c = 4ab\,n_c : \Delta \qquad (V)$$

b) Para el caso de que en cada uno de sus vértices concurran dos caras regulares diferentes, de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ lados respectivamente, siendo $\widehat{n_a}$ y $\widehat{n_c}$ el número de cada una de ellas:

$$\Delta' = 2(a\,n_b + b\,n_a) + ab(2 - n_a - n_b) \qquad (VI)$$

$$V = 4ab : \Delta \qquad (VII)$$

$$C_a = 4b\,n_a : \Delta \qquad (VIII)$$

$$C_b = 4a\,n_b : \Delta \qquad (IX)$$

3. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un poliedro arquimediano

Los posibles poliedros arquimedianos que cumplen las condiciones 1ª a 5ª, estudiadas en los párrafos 2.1, 2.2 y 2.4, están resumidos y enumerados en el párrafo 2.6. Dichas condiciones son <u>necesarias</u> pero <u>no suficientes</u> para todo arquimediano.

Falta por comprobar como 6ª y última condición, la posibilidad de existencia de un poliedro arquimediano cuyas características particulares en respecto a su número de caras, vértices y aristas, sean las contenidas en los 61 casos posibles que, como resultado de nuestro estudio, se resumen en el párrafo 2.6.

UNE A4 210 X 297

Para ello, analizaremos en cada caso la posibilidad de dicha existencia, es decir trataremos de construir el poliedro estudiado con sus caras poligonales adecuados y cuyos ángulos sólidos, que sucesivamente iremos obteniendo; sean al mismo tiempo todos iguales o simétricos.

Aun cuando debido al número limitado de casos (61) podríamos efectuar esta comprobación intentando acoplar materialmente polígonos planos regulares de lados iguales, recortado en cartulina el número y forma de los necesarios para cada caso hasta ver si su conjunto cierran espacio y al mismo tiempo resultan iguales o simétricos todos sus ángulos sólidos, consideramos que esta comprobación, al mismo tiempo que larga y penosa, no tiene ningún rigor matemático.

Por este motivo, prescindimos de ella y vamos a realizar la comprobación mediante un estudio topológico de cada caso particular.

3.1 Estudio topológico para la comprobación de la existencia de los posibles poliedros arquimedianos detallados en el párrafo 2.6.

El análisis topológico estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten cuando dichas figuras se someten a deformaciones tan radicales que las hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas.

UNE A4 210 X 297

En el estudio que vamos a realizar aplicaremos a cada poliedro, bajo el supuesto de que éste es hueco y su superficie suficientemente elástica (caucho p. e.), una transformación topológica consistente en suponer que previamente separamos una de sus caras y posteriormente deformamos la superficie restante hasta conseguir extenderla sobre un plano, con lo cual el número de polígonos planos es inferior en una unidad al del primitivo poliedro del que hemos suprimido una cara.

En esta transformación se alterarán arbitrariamente las formas de sus caras, sus ángulos y sus superficies, pero al ser biunívoca se conservará en la red plana de vértices y aristas resultante el número de ellas y la ordenación de sus caras, con lo cual al dibujar dicha red nos será posible discernir la existencia o no del poliedro estudiado. Admitiremos que la deformación aplicada transforma las aristas del poliedros en segmentos rectilíneos de magnitud arbitraria, con lo cual la red plana resultante tiene todos sus contornos poligonales rectos.

Como método general para la construcción y estudio de dicha red, partiremos del contorno de la cara inicial separada después de su deformación, que dibujaremos suficientemente ampliada y siempre como un polígono regular del mismo número de lados que el

UNE A4 210 X 297

de dicha cara. El interior de este contorno puede considerarse a su vez como el correspondiente al del polígono de la cara inicialmente suprimida que, podemos considerar como restituída después de la transformación topológica aplicada; independientemente de dicha cara y sobrepuesta a la misma, aparecerá la red plana resultante de los restantes vértices y aristas del poliedro estudiado.

3.11 Ángulos sólidos de cinco caras regulares no iguales

Caso 1 $4P_3 + 1P_4$ $C_3 = 32$ $C_4 = 6$ $V = 24$ $A = 60$

Supongamos separada una de sus caras cuadradas, de vértices $\overline{1\cdot2\cdot3\cdot4}$, la cual, después de dilatada forma el contorno exterior de la red poligonal. (fig. 1).

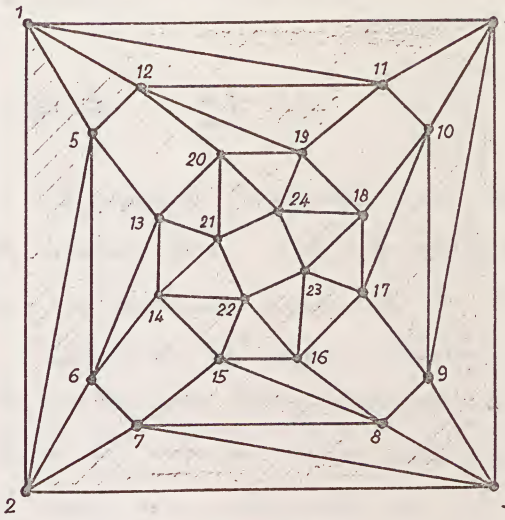


Figura 1

. En el vértice $\overline{1}$ acoplamos los triángulos $\overline{1\cdot2\cdot5}$, $\overline{1\cdot5\cdot12}$, $\overline{1\cdot12\cdot11}$ y $\overline{1\cdot11\cdot4}$ que completarán el ángulo poliedro en $\overline{1}$, junto con la cara $\overline{1\cdot2\cdot3\cdot4}$, produciéndose al mismo tiempo los nuevos vértices 5; 11, 12.

Pasemos seguidamente al vértice $\overline{2}$, donde tenemos representada la cara cuadrada $\overline{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ y la triangular $\overline{1\cdot2\cdot5}$; completémosla con las

UNE A4 210 X 297

2·6·5, 2·7·6 y 2-3-7, apareciendo los nuevos vértices 6 y 7. Repitiendo el proceso en los vértices 3 y 4, conseguimos llegar de nuevo al 1 que se cierra sin dificultad, habiendo surgido los nuevos vértices 8, 9, 10 y 11. Tomando a continuación como base el octógono 5·6·... 11·12, completaremos de forma análoga sus vértices y obtendremos el nuevo contorno octogonal 13·14·... 19·20. Repitiendo en estos nuevos vértices el proceso anterior, conseguimos la terminación y cierre de la red plana con el cuadrado 21·22·23·24, lo cual nos confirma la existencia del caso que nos ocupa. La ordenación de las caras en sus ángulos sólidos es única. ($P_4 - P_2 - P_3 - P_3 - P_3$) Caso posible

Caso 2 $4P_3 + 1P_5$ $C_3 = 80$ $C_5 = 12$ $V = 60$ $A = 150$

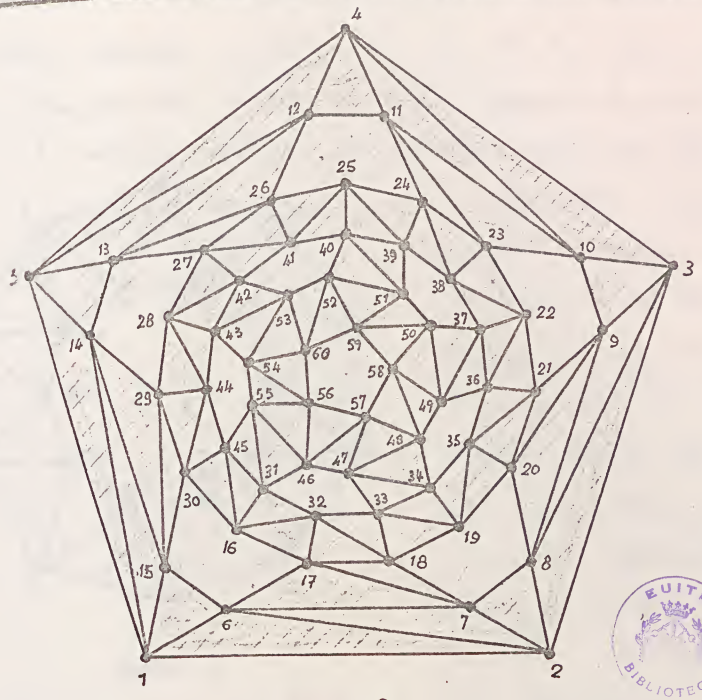
Supongamos separada una de sus caras pentagonales de vértices 1·2·...·4·5, la cual, después de dilatada, forma el contorno exterior de la red poligonal (figura 2).

Siguiendo el proceso general, acoplaremos en el vértice 1 las cuatro caras triangulares que lo completan, y sucesivamente en los restantes vértices del pentágono base, obteniéndose el cierre sin dificultad en el anillo 1·2·...·4·5, 6·7·...·14·15. Tomando como base éste, volveremos a formar un segundo anillo (hasta el vértice 30), otro tercero (hasta el vértice 45), otro cuarto (hasta el vértice 55) y finalmente otro quinto

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 61 al 70



EUITIS BIBLIOTECA

Figura 2

y último (hasta el vértice 60) que queda cerrado con una última cara pentagonal 56.57...59.60, lo cual nos confirma la existencia de este poliedro.

La ordenación de las caras en sus ángulos sólidos es única $(P_5 - P_3 - P_3 - P_3 - P_3)$.

Caso posible

1.2 Ángulos sólidos de cuatro caras regulares no iguales

Caso 3 $3\,P_3 + 1\,P_n \quad (3<n<\infty) \quad C_3 = 2n \quad C_n = 2 \quad V = 2n \quad A = 4n$

Para el estudio topológico de este caso, en que una de las caras del ángulo sólido del poliedro es un polígono regular de cualquier número de lados, mayor de tres,

suprimiremos separada inicialmente una de las dos únicas caras no triangulares del poliedro, la cual, después de dilatada, forma el contorno exterior de la red poligonal (fig. 3).

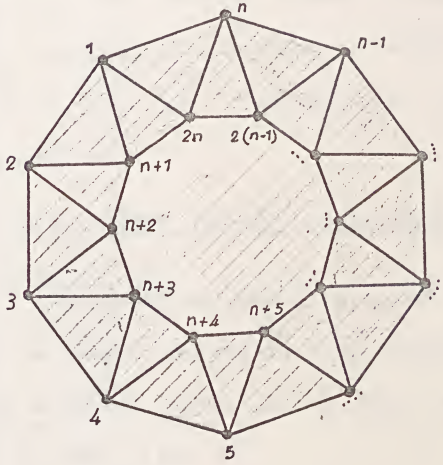


Figura 3

Siguiendo el proceso general, acoplaremos en el vértice $\overline{1}$ las tres caras triangulares que lo completa, e igualmente en los restantes vértices del polígono base, obteniéndose el cierre sin dificultad al volver al vértice $\overline{1}$ de partida. Con este proceso obtendremos otros $\overline{n}$ vértices del poliedro, que numerados sucesivamente desde el $\overline{n+1}$ al $\overline{2n}$, nos permitirá cerrar la figura con la segunda y última cara poligonal del poliedro y que nos confirma la existencia del mismo para cualquier valor de $\overline{3 < n < \infty}$.

La ordenación de las caras en sus ángulos sólidos, es única: $\overline{(P_n - P_3 - P_3 - P_3)}$.

Este caso presenta pues, infinitas soluciones.

Caso posible

Sec 4 $2P_3 + 2P_4$ $C_3 = 8$ $C_4 = 6$ $V = 12$ $A = 24$

En este caso, la ordenación de las caras en los ángulos sólidos del poliedro, puede hacerse bien colocando las caras iguales consecutivas, o alternadas ($P_3 - P_3 - P_4 - P_4$ ó $P_3 - P_4 - P_3 - P_4$). Estudiaremos separadamente ambas posibilidades.

4. A Caras iguales consecutivas ($P_3 - P_3 - P_4 - P_4$)

Siguiendo el proceso general, supongamos separada una de las caras cuadradas, de vértices 1·2·3·4, la cual, después dilatada forma el contorno exterior inicial de la red poligonal (fig. 4).

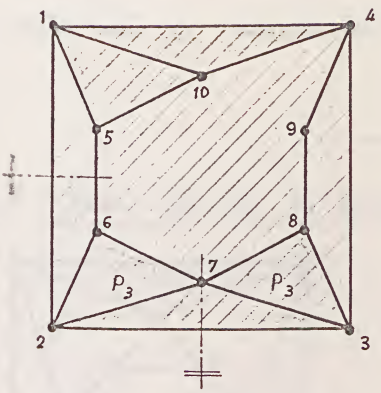


Figura 4

Completemos el vértice 1 con el cuadrado consecutivo 1·2·6·5 al cuadrado inicial 1·2·3·4, y con los dos triángulos consecutivos 1·5·10 y 1·10·4, que dan origen a los nuevos vértices 6, 5 y 10

Pasemos a continuación a completar el vértice 2, en el que ya tenemos colocados los dos cuadrados consecutivos 1·2·3·4 y 1·2·6·5, con los dos triángulos también consecutivos 2·7·6 y 2·3·4, que dan origen a los nue-

vértice 7.

Obsérvese que al pasar del vértice 1 al consecutivo 2, el último ángulo sólido es, en el espacio, simétrico del 1 con respecto al plano mediatriz de la arista común, ocurriendo lo mismo en los pasos sucesivos.

Completemos seguidamente el vértice 3 con el triángulo 2·8·7 y el cuadrado 3·4·9·8, simétrico al ángulo sólido 2 con respecto al plano mediatriz de la arista común 2·3, dando origen a los nuevos vértices 8 y 9.

Al llegar a este paso surge ya una contradicción en el vértice 7, en el que se han formado tres triángulos (los 2·7·6, 2·3·7 y 3·8·7) en contradicción con la hipótesis, lo cual nos demuestra la imposibilidad de la existencia de este poliedro.

Caso no posible

---

4 B Caras iguales alternadas (P_3 - P_4 - P_3 - P_4)

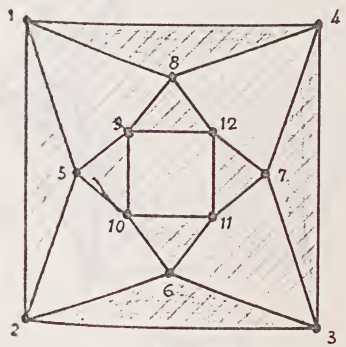


Figura 5

Siguiendo el proceso general, y partiendo de la base cuadrada 1·2·3·4, obtenemos sin contradicción la red poligonal de la figura 5, cerrada con el cuadrado 9·10·11·12,

que nos demuestra la existencia de este poliedro.

Caso posible

Caso 6 $2P_3 + 1P_4 + 1P_6$ $C_3 = 16$ $C_4 = 6$ $C_6 = 4$ $V = 24$ $A = 48$

La ordenación de las caras en los ángulos sólidos admite dos variaciones, según sean las dos caras consecutivas $(P_3 - P_3 - P_4 - P_6)$ o alternadas con las otras dos $(P_3 - P_4 - P_3 - P_6)$. Estudiaremos separadamente ambas posibilidades.

6.A Caras iguales consecutivas $(P_3 - P_3 - P_4 - P_6)$

Siguiendo el proceso general, supongamos separada la cara exagonal P_6, de vértices $1 \cdot 2 \dots 5 \cdot 6$, la cual, después de dilatada forma el contorno exterior inicial de la red poligonal (fig. 6).

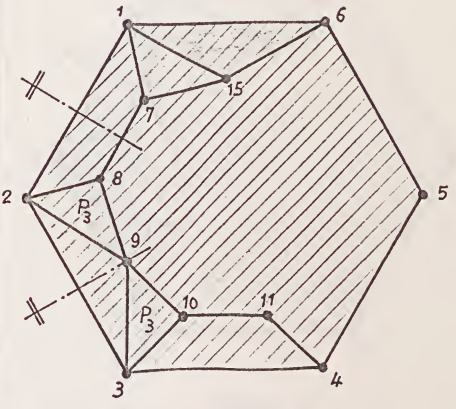


Figura 6

Completemos el vértice 1 con el cuadrado consecutivo $1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7$ al exágono inicial, y con los dos triángulos también consecutivos $1 \cdot 7 \cdot 15$ y $1 \cdot 15 \cdot 16$, que dan origen a los nuevos vértices 8, 7 y 15.

Procedamos a continuación a completar el vértice 2, simétrico al 1 con respecto

UNE A4 210 X 297

al plano mediador de la arista $\overline{1\cdot 2}$, que origina el nuevo vértice $\overline{9}$. Seguidamente ponemos al $\overline{3}$, simétrico del $\overline{2}$, dando origen a los nuevos vértices $\overline{10}$ y $\overline{11}$.

Al llegar a este paso queda alterada la ordenación de sus caras en el vértice $\overline{9}$, lo que nos demuestra la imposibilidad de existencia de este poliedro.

Caso no posible

6.B Caras iguales alternadas ($P_3 - P_4 - P_3 - P_6$)

Al igual que el anterior, seguiremos el mismo proceso inicial con la base exagonal $\overline{1\cdot 2 \ldots 5\cdot 6}$. Iniciemos en el vértice $\overline{1}$ el complemento de las dos caras triangulares $\overline{1\cdot 2\cdot 8}$ y $\overline{1\cdot 18\cdot 6}$, alternadas con la cuadrada $\overline{1\cdot 8\cdot 7\cdot 18}$ (fig. 7).

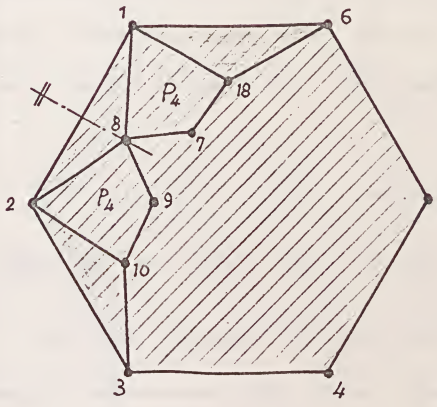


Figura 7

Al pasar a la construcción del vértice $\overline{2}$, simétrico del $\overline{1}$ con respecto a la arista común $\overline{1\cdot 2}$, surge de inmediato la formación del vértice $\overline{8}$, donde aparecen dos caras cuadradas $\overline{2\cdot 10\cdot 9\cdot 8}$ y $\overline{1\cdot 8\cdot 7\cdot 18}$, en contradicción con la hipótesis, lo cual nos demuestra la imposibilidad de

UNE A4 210 X 297

este poliedro.

Caso no posible

Casos 8, 9, 10 y 11

8.	$2P_3 + 1P_4 + 1P_8$
9.	$2P_3 + 1P_4 + 1P_9$
10.	$2P_3 + 1P_4 + 1P_{10}$
11.	$2P_3 + 1P_4 + 1P_{11}$

Estos casos son análogos al número 6, estudiado anteriormente. Todos ellos tienen de común el de formar el ángulo sólido con dos caras triangulares, una cuadrada y una cuarta de lados variables y crecientes con respecto a la exagonal del caso 6. Por consiguiente, si se sigue el mismo el mismo proceso de formación del mencionado caso 6, llegaremos a las mismas conclusiones de imposibilidad, tanto para las caras triangulares en forma consecutiva o alternadas con respecto a las dos restantes.

Casos no posibles

Caso 12 $2P_3 + 2P_5$ $C_3 = 20$ $C_5 = 12$ $V = 30$ $A = 60$

Este caso también presenta dos posibilidades de ordenación, según coloquemos las caras iguales consecutivas $(P_3 - P_3 - P_5 - P_5)$ o alternadas $(P_3 - P_5 - P_3 - P_5)$. Estudiaremos independientemente cada una de ellas

12. A Caras iguales consecutivas $(P_3 - P_3 - P_5 - P_5)$

Partiendo de la base pentagonal $\overline{1\cdot2\ldots4\cdot5}$ (fig.8), y siguiendo el proceso general de construcción a partir del vértice 1, llegaremos en el tercer paso (vértice 3) a una contradicción con la hipótesis, ya que en el vértice 10 se reunen tres triángulos equiláteros, lo cual nos demuestra la imposibilidad de existencia de este poliedro.

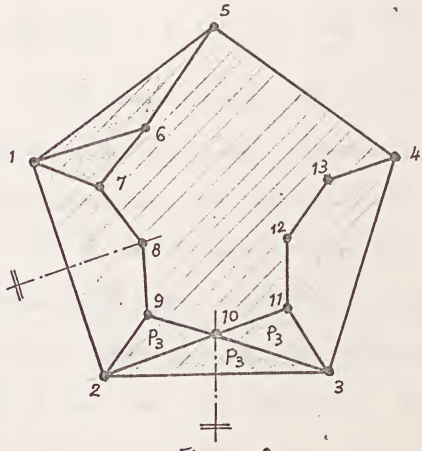


Figura 8

Caso no posible

12. B Caras iguales alternadas $(P_3 - P_5 - P_3 - P_5)$

Siguiendo el proceso anterior, con orden alternado de sus caras, podemos comprobar que el trazado de la red poligonal representada en la figura 9, no tiene contradicción alguna y llega a cerrarse en el pentágono central $\overline{26\cdot27\ldots29\cdot30}$, lo cual nos demuestra la

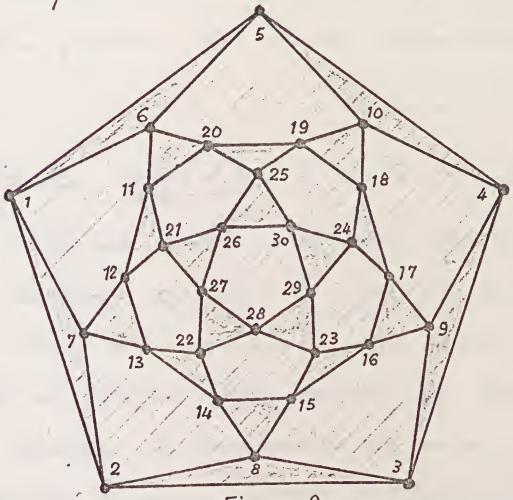


Figura 9

posibilidad de existencia de este poliedro

Caso posible

Caso 13 $2P_3 + 1P_5 + 1P_6$ $C_3 = 40$ $C_5 = 12$ $C_6 = 10$ $V = 60$ $A = 120$

Este caso permite dos posibilidades de ordenación, según coloquemos las caras iguales consecutivas $(P_3 - P_3 - P_5 - P_6)$, o alternadas con las dos restantes $(P_3 - P_5 - P_3 - P_6)$.

Si lo comparamos con el caso 6, del cual puede obtenerse éste por sustitución de P_4 por P_5 y seguimos el mismo trazado de la figura 6 para la primera variante y el de la figura 7 para la segunda, cambiando la cara cuadrada por la pentagonal, llegaremos a las mismas conclusiones de incompatibilidad que nos demuestran la imposibilidad de existencia de este poliedro.

Por los motivos expuestos prescindimos de la representación gráfica de ambas variantes.

Caso no posible

Caso 14 $2P_3 + 1P_5 + 1P_7$ $C_3 = 140$ $C_5 = 42$ $C_7 = 30$ $V = 210$ $A = 420$

Este caso puede deducirse del anterior nº 13, al sustituir el exágono regular P_6 por el eptágono regular P_7.

Como esta sustitución sólo altera en su figura topológica el polígono base, origen del trazado, esta circunstancia no cambia la secuencia del mismo, por lo que se presentarán las mismas incompatibilidades puestas en eviden-

UNE A4 210 X 297

cia en las figuras 6 y 7, que nos demuestran la imposibilidad de existencia de este poliedro.

Caso no posible

Caso 15 — $1\,P_3 + 3\,P_4$ — $C_3 = 8$ $C_4 = 18$ $V = 24$ $A = 48$

Este caso solo tiene una ordenación única en la colocación de sus caras.

El proceso general, aplicado al mismo, partiendo de una de las caras cuadradas que, después de dilatada, forma el contorno $1+2+3+4$ de la red poligonal (fig. 10), da lugar al trazado cerrado de dicha figura que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro

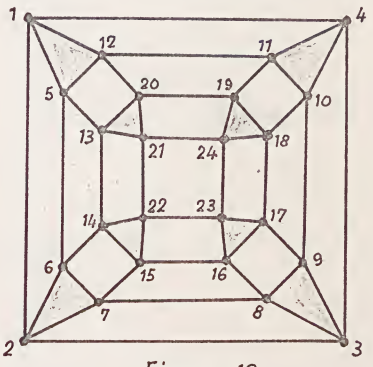


Figura 10

Caso posible

Caso 16 — $1\,P_3 + 2\,P_4 + 1\,P_5$ — $C_3 = 20$ $C_4 = 30$ $C_5 = 12$ $V = 60$ $A = 120$

Este caso admite dos posibilidades de ordenación de sus caras en los ángulos sólidos, pudiéndose disponer los dos cuadrados P_4 consecutivamente $(P_3 - P_4 - P_4 - P_5)$, o alternados con los otros dos polígonos desiguales $(P_3 - P_4 - P_5 - P_4)$. Estudiaremos separadamente ambas posibilidades.

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 71 al 80

16. A Caras iguales consecutivas $(P_3 - P_4 - P_4 - P_5)$.

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de la cara pentagonal $\overbrace{1\cdot2\ldots4\cdot5}$, nos conduce al trazado realizado en la figura 11, donde al completar el vértice $\overbrace{3}$, surge contradicción con la hipótesis al alternarse en el mismo vértice $\overbrace{10}$ la ordenación consecutiva de sus caras iguales, lo que nos demuestra la imposibilidad de existencia de este poliedro.

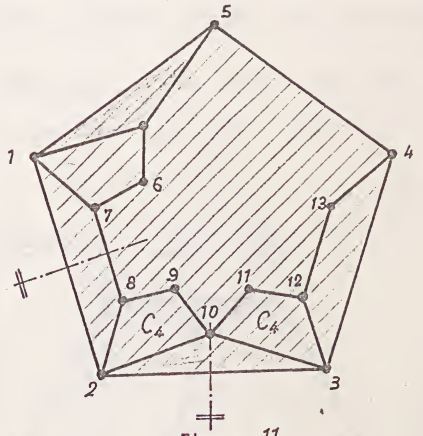


Figura 11

. Caso no posible

16. B Caras iguales alternadas $(P_3 - P_4 - P_5 - P_4)$

El proceso general, aplicado a este caso y partiendo de una cara pentagonal que, después de dilatada, forma el contorno $\overbrace{1\cdot2\ldots4\cdot5}$ (fig. 12) de la red poligonal, da lugar al trazado cerrado de dicha figura, que nos de-

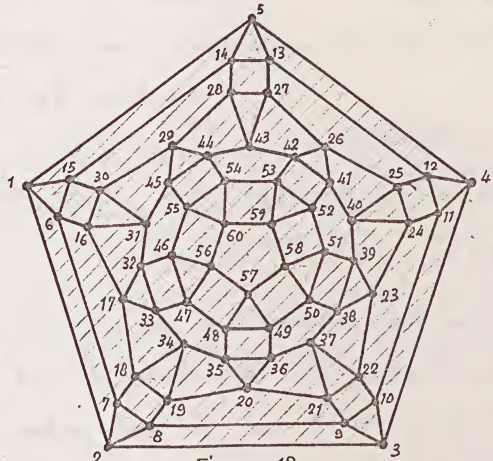


Figura 12

UNE A4 210 X 297

demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro

Caso posible

3.13 Ángulos sólidos de tres caras regulares no iguales

Caso 19 El estudio de este caso lo haremos incluyéndolo en el número 122, del cual es un caso particular $(2P_4 + 1P_3)$.

Caso 52 $1P_3 + 2P_6$ $C_3 = 4$ $C_6 = 4$ $V = 12$ $A = 18$

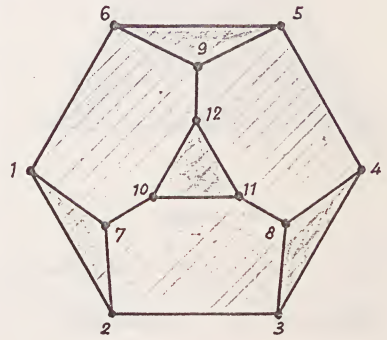


Figura 13

El proceso general, aplicado a este caso y partiendo de una cara exagonal que, después de dilatada forma el contorno exterior $1.2 \ldots 5.6$ de la red poligonal (fig. 13), da lugar al trazado cerrado de dicha figura que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

Caso 53 $1P_3 + 1P_6 + 1P_n$ $(6 < n < \infty)$ $C_3 = \frac{2}{3}n$ $C_6 = \frac{1}{3}n$

$C_n = 2$ $V = 2n$ $A = 3n$

Al analizar este caso en el párrafo 2,53 hemos demostrado que la posibilidad de su existencia puede realizarse con los valores de n de $9, 12, 15, 18 \ldots$ lo que supone infi-

UNE A4 210 X 297

ritas soluciones posibles.

Observemos previamente que siendo $\overline{n > 6}$, los tres polígonos que forman un ángulo sólido en cualquiera de los posibles poliedros, son desiguales, y que al menos uno de ellos, el $\overline{P_3}$, es de un número impar de lados.

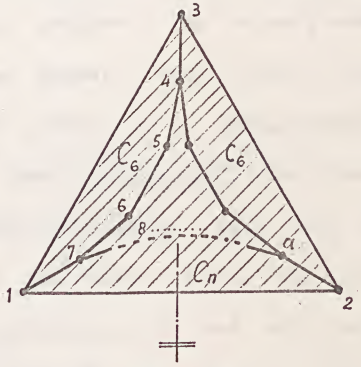


Figura 14

Siguiendo el proceso general, supongamos separada la cara $\overline{P_3}$ de número impar de lados y vértices $\overline{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (fig. 14), la cual después de dilatada forma el contorno inicial de la red.

Completemos el vértice $\overline{1}$ con el exágono $\overline{1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}$ y con el polígono $\overline{1 \cdot 2 \cdot a \ldots 8 \cdot 7 \cdot 1}$, de $\overline{n}$ lados y arista común $\overline{1 \cdot 7}$.

Procedamos a completar el vértice $\overline{2}$ con un nuevo exágono y arista común $\overline{a \cdot 2}$ con el $\overline{P_n}$; este vértice 2 será pues simétrico al $\overline{1}$ con respecto al plano mediatriz de la arista $\overline{1 \cdot 2}$.

Esta segunda operación origina en el vértice $\overline{3}$ la formación del ángulo sólido con dos caras iguales $\overline{C_6}$ y arista común $\overline{3 \cdot 4}$, lo cual contradice la hipótesis, y nos demuestra la imposibilidad de existencia de esta serie infinita de poliedros.

Caso no posible

UNE A4 210 X 297

Antes de dar por terminado el estudio de este caso vamos a deducir conclusiones más generales que nos simplificarán el estudio de los casos restantes.

En primer lugar, podremos observar que si en lugar de partir de un triángulo equilátero $\widehat{P_3}$, partimos de un polígono de cualquier número impar de lados, que forme una cara del ángulo sólido, siendo las otras dos caras — desiguales, al cerrar el primer ciclo de la red poligonal, nos encontraríamos siempre en el último vértice con dos caras contiguas iguales, ya que en cada vértice formado, sus caras están ordenadas simétricamente al del anterior con respecto a su arista común, y al ser impar el número de lados del polígono base se obtienen al mismo tiempo ángulos poliedros iguales de forma alternativa, ocurriendo lo mismo con sus simétricos que también son alternativamente iguales, por lo que el final coincide un vértice con su simétrico, que nos demuestra la imposibilidad de su existencia. Por consiguiente:

6ª) "No puede existir un poliedro arquimediano de vértices triedros si sus caras son desiguales y una de ellas, al menos, tiene un número impar de lados"

También podemos pensar en que si el triedro tiene

UNE A4 210 X 297

dos caras iguales y los polígonos de éstas son de lados impares, podemos iniciar siempre la red poligonal por uno de los polígonos de lados impares, en cuyo caso debe completarse cada vértice con dos polígonos desiguales, lo cual nos dará siempre la contradicción expresada en la figura 14, al terminar el primer ciclo. Por consiguiente:

7ª) No puede existir un poliedro arquimediano de vértices triedros si teniendo dos caras iguales son éstas de un número impar de lados.

Casos 61 - 68 - 77 - 82 - 83 - 85 - 87 - 88 (véase detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 1ª del caso 53, no pueden existir estos poliedros.

Caso no posible

Caso 89 $1P_3 + 2P_8$ $C_3 = 8$ $C_8 = 6$ $V = 24$ $A = 36$

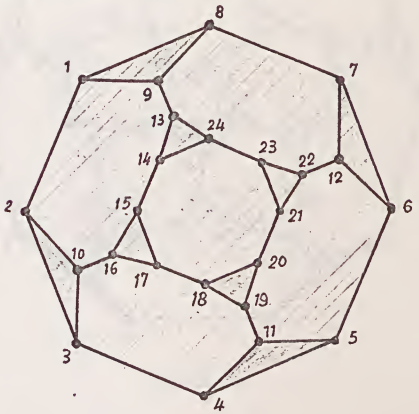


Figura 15

El proceso general, aplicado a este caso, partiendo de la cara octogonal 1.2...7.8, (fig. 15) da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro. Caso posible

---

Casos 93 - 97 - 99 - 101 - 103 (ver detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Caso no posible

Caso 105 $1P_3 + 2P_9$

De acuerdo con la condición 7ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

Casos 108 - 110 - 112 (ver detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles.

Caso 114 $1P_3 + 2P_{10}$ $C_3 = 20$ $C_{10} = 12$ $V = 60$ $A = 90$

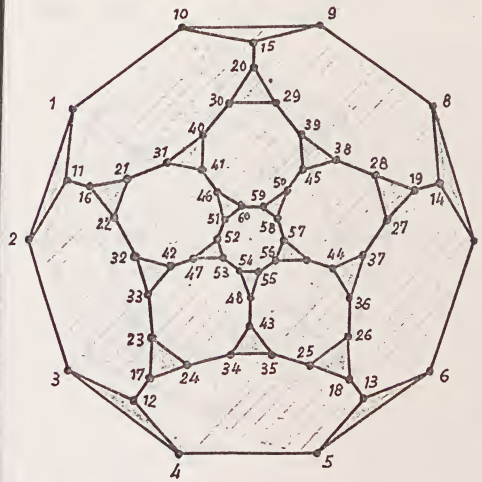


Figura 16

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de la cara P_{10}, de vértices 1-2-...-9-10 (fig. 16) da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

Caso 116 - 118 (ver detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Caso no posible

Caso 119 $1P_3 + 2P_{11}$

De acuerdo con la condición 7ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

Caso 120 - 121 (ver detalle al dorso

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Caso no posible

Caso 122 $2P_4 + 1P_n$ $(2 < n < \infty)$ $C_4 = n \cdot C_n = 2$, $V = 2n$ $A = 3n$

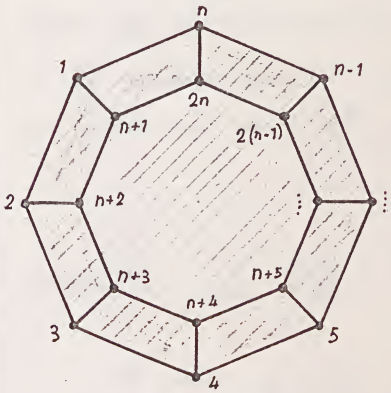


Figura 17

Para el estudio topológico de este caso, en que una de las caras del ángulo sólido es un polígono regular de cualquier número de lados, mayor que dos, imaginemos separada inicialmente una de las dos únicas caras no cuadradas del poliedro, la cual, después de dilatada forma el contorno exterior $1 \cdot 2 \cdot \cdot (n-1) \cdot n$ de la red poligonal (fig. 17).

Siguiendo el proceso general, acoplaremos en el vértice 1 las dos caras cuadradas que lo completa, e igualmente en los restantes vértices del polígono base, obteniéndose el cierre sin dificultad al volver al vértice 1 de partida. Con este proceso obtenemos otros n vértices del poliedro, que numerados sucesivamente desde el $n+1$ al $2n$, nos permitirá cerrar la figura con la segunda y última cara C_n del poliedro y que nos confirma la existencia del mismo para cualquier valor de $2 < n < \infty$.

La ordenación de las caras en sus ángulos sólidos, es única $(P_n - P_4 - P_4)$.

Este caso presenta pues, infinitas soluciones.

Caso posible

Casos 128 - 130 - 133 - 134 - 136 - 137 (ver detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 6ª del caso nº 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Caso 138 $1P_4 + 2P_6$ $C_4 = 6$ $C_6 = 8$ $V = 24$ $A = 36$

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de una cara exagonal $1 \cdot 2 \ldots 5 \cdot 6$ (fig. 18) da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha fi-

UNE A4 210 X 297

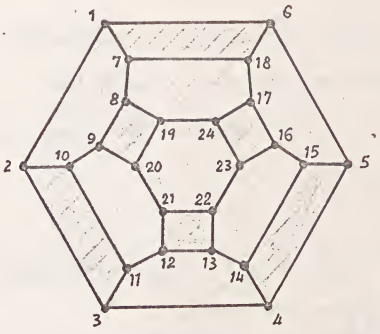


Figura 18

guna, que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

EUITIS BIBLIOTECA

Caso posible

Caso 140 $1.P_4 + 1\,P_6 + 1\,P_8$ $C_4 = 12$ $C_6 = 8$ $C_8 = 6$ $V = 48$ $A = 72$

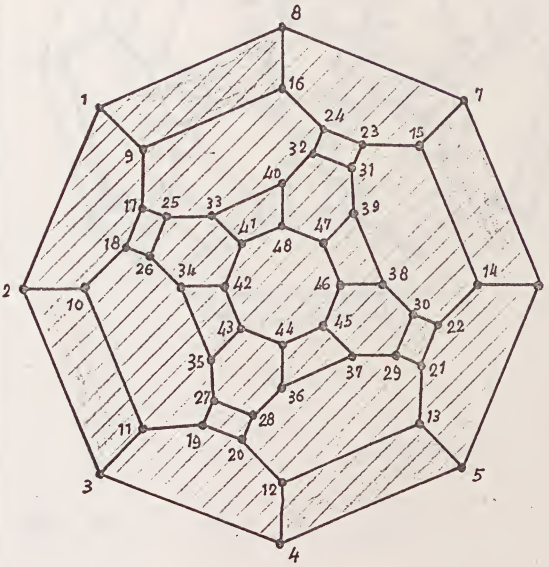


Figura 19

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de una cara octogonal (1 2 ... 7 8 fig. 19) da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

UNE A4 210 X 297

Caso 141 $1P_4 + 1P_6 + 1P_9$

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

Caso 142 $1P_4 + 1P_6 + 1P_{10}$ $C_4 = 30$ $C_6 = 20$ $C_{10} = 12$ $V = 120$ $A = 180$

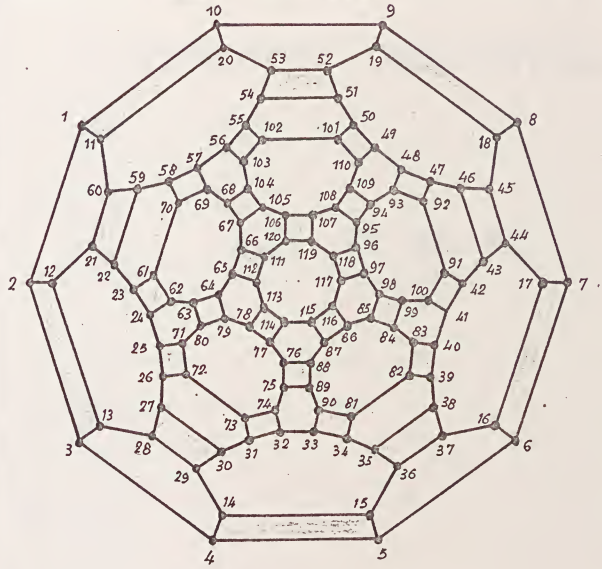


Figura 20

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de una cara decagonal 1·2···9·10 (fig. 20), da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

Caso 143 $1P_4 + 1P_6 + 1P_{11}$

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 81 al 90

Caso 144 $1\,P_4 + 2\,P_7$

De acuerdo con la condición 7ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

Casos 145 - 146

145	$1\,P_4 + 1\,P_7 + 1\,P_8$
146	$1\,P_4 + 1\,P_7 + 1\,P_9$

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Casos 147 - 149 - 150

147	$2\,P_5 + 1\,P_6$
149	$2\,P_5 + 1\,P_8$
150	$2\,P_5 + 1\,P_9$

De acuerdo con la condición 7ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Caso 151 $1\,P_5 + 2\,P_6$

$C_5 = 12 \quad C_6 = 20 \quad V = 60 \quad A = 90$

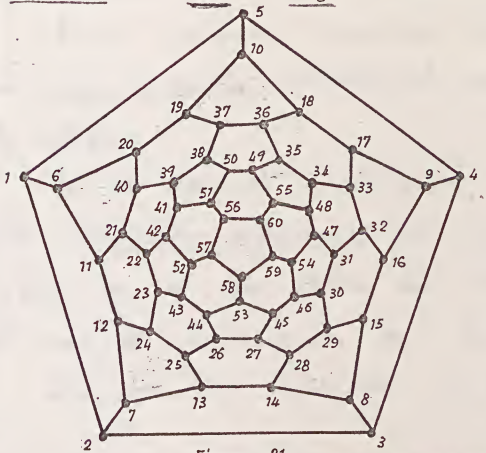


Figura 21

El proceso general, aplicado a este caso, partiendo de una cara pentagonal 1.2...4.5 (fig. 21), da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de es-

UNE A4 210 X 297

te poliedro.

Caso posible.

Caso 152 $1P_5 + 1P_6 + 1P_7$

De acuerdo con la condición 1ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro

Caso no posible

---

4. Resumen general de los únicos poliedros arquimedianos que, de acuerdo con su definición, puedan construirse geométricamente en el espacio euclidiano.

Después de la selección topológica realizada entre los posibles poliedros que cumplen las condiciones 1ª. a 5ª establecidas en los párrafos 2.1 y 2.4, obtenemos un número definitivo de soluciones que vamos a clasificar en dos grupos.

En el primero incluimos los casos en que se obtiene una solución individual para un determinado ángulo sólido.

En el segundo incluimos los casos en que se obtienen infinitas soluciones para un determinado ángulo sólido en el que varía tan sólo el número de lados de uno de los polígonos que forman sus caras.

Estas soluciones definitivas son las siguiente:

UNE A4 210 X 297

Poliedros arquimedianos de solución única: Todo en cuadro

I	Caso 1	$4P_3 + 1P_4$	$C_3 = 32$	$C_4 = 6$	$V = 24$	$A = 60$	
II	" 2	$4P_3 + 1P_5$	$C_3 = 80$	$C_5 = 12$	$V = 60$	$A = 150$	
III	" 4B	$2P_3 + 2P_4$	$C_3 = 8$	$C_4 = 6$	$V = 12$	$A = 24$	
IV	" 12B	$2P_3 + 2P_5$	$C_3 = 20$	$C_5 = 12$	$V = 30$	$A = 60$	
V	" 15	$1P_3 + 3P_4$	$C_3 = 8$	$C_4 = 18$	$V = 24$	$A = 48$	
VI	" 16B	$1P_3 + 2P_4 + 1P_5$	$C_3 = 20$	$C_4 = 30$	$C_5 = 12$	$V = 60$	$A = 120$
VII	" 52	$1P_3 + 2P_6$	$C_3 = 4$	$C_6 = 4$	$V = 12$	$A = 18$	
VIII	" 89	$1P_3 + 2P_8$	$C_3 = 8$	$C_8 = 6$	$V = 24$	$A = 36$	
IX	" 114	$1P_3 + 2P_{10}$	$C_3 = 20$	$C_{10} = 12$	$V = 60$	$A = 90$	
X	" 138	$1P_4 + 2P_6$	$C_4 = 6$	$C_6 = 8$	$V = 24$	$A = 36$	
XI	" 140	$1P_4 + 1P_6 + 1P_8$	$C_4 = 12$	$C_6 = 8$	$C_8 = 6$	$V = 48$	$A = 72$
XII	" 142	$1P_4 + 1P_6 + 1P_{10}$	$C_4 = 30$	$C_6 = 20$	$C_{10} = 12$	$V = 120$	$A = 180$
XIII	" 151	$1P_5 + 2P_6$	$C_5 = 12$	$C_6 = 20$	$V = 60$	$A = 90$	

Poliedros arquimedianos de infinitas soluciones: Todo en cuadro

Serie A_n	Caso 3	$3P_3 + 1P_n$ $(3 < n < \infty)$	$C_3 = 2n$	$C_n = 2$	$V = 2n$	$A = 4n$
Serie B_n	" 122	$2P_4 + 1P_n$ $(2 < n < \infty)$	$C_4 = n$	$C_n = 2$	$V = 2n$	$A = 3n$

Independientemente de la nomenclatura que emplearemos para la designación de los trece poliedros del primer grupo, ordenamos éstos con cifras romanas correlativas del uno al trece.

Para los dos únicos casos del segundo grupo, (ángulos sólidos con) llamaremos Serie A_n a los infinitos poliedros de tres caras triangulares y

UNE A4 210 X 297

una poligonal de cualquier número de lados, y Serie B a los infinitos poliedros de ángulos sólidos con dos caras cuadradas y una poligonal de cualquier número de lados.

CAPITULO II

Estudio conjunto del cálculo analítico de las principales magnitudes de los poliedros arquimedianos, de su representación gráfica directa en el Sistema diédrico y de su representación gráfico-analítica como aplicación del cálculo analítico.

5. Propiedades geométricas de los poliedros arquimedianos.

Establecida en el párrafo 4, la existencia de los trece únicos poliedros arquimedianos de tipo individual para un determinado ángulo sólido, a los que nos referiremos en lo sucesivo por el número de orden dado en cifras romanas (I al XIII), y dos series infinitas de poliedros arquimedianos con ángulos sólidos análogos en cada serie, que hemos denominado Serie A y Serie B respectivamente, vamos a establecer propiedades geométricas comunes a todos ellos.

5.1 Las aristas de un poliedro arquimediano son todas iguales.

En efecto, siendo cada arista lado común de los po-

UNE A4 210 X 297

lígonos que forman dos caras contiguas, y siendo estos polígonos, por definición, regulares, cada arista tendrá la misma longitud que los lados de ambos polígonos contiguos, cuyos restantes lados son a su vez aristas del poliedro.

5.2 En todo poliedro arquimediano existe una esfera que pasa por todos los vértices del mismo. Dicha esfera será pues circunscrita al poliedro y éste inscrito en aquélla

5.21 Para su demostración, consideramos primeramente aquellos poliedros arquimedianos cuyos ángulos sólidos son triedros.

Este grupo lo forman los arquimedianos VII al XIII y los infinitos de la Serie B.
En todos ellos existen, al menos, dos caras designales, y si además hay dos iguales, éstas no son triangulares.

Sean (fig. 22) $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ los polígonos correspondientes a las dos caras designales (una de ellas puede ser triangular) de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ lados respectivamente, cuya arista común es $\widehat{M\text{-}N}$. Tracemos por el punto $\widehat{P}$, medio del segmento $\widehat{M\text{-}N}$ un plano perpendicular a éste; dicho plano cortará a las caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ según rectas perpendiculares a $\widehat{M\text{-}N}$, las cuales pasarán a su vez por los centros $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ de los polígonos regulares $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ respectivamente.

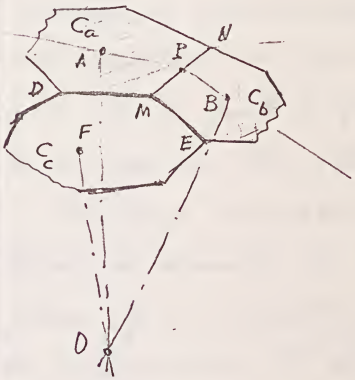


Figura 22

Tracemos a continuación por $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ rectas perpendiculares a las caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$, que

UNE A4 210 X 297

estarán contenidas en el plano perpendicular a ambas $\overline{APB}$, y que se cortarán en dicho plano en el punto $\widehat{O}$, ya que los dos caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ forman entre sí un determinado ángulo diedro.

El punto $\widehat{O}$, equidistará de $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$, así como de los restantes vértices de los dos polígonos $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ que, supuestos unidos al centro $\widehat{O}$, formarán dos pirámides rectas regulares de bases $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$, y de alturas respectivas $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$; por consiguiente, los puntos $\widehat{D}$ y $\widehat{E}$ extremos de las aristas $\overline{MD}$ y $\overline{ME}$ correspondientes éstas a la tercera cara $\widehat{C_c}$ (no triangular) del triedro, también equidistarán de $\widehat{O}$. Ahora bien, el plano de la cara $\widehat{C_c}$ está determinado por los tres puntos no alineados $\widehat{D}$, $\widehat{M}$ y $\widehat{E}$ ($\widehat{D}$ y $\widehat{E}$ están en $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ respectivamente) y siendo un polígono regular mayor de tres lados, su centro $\widehat{F}$ equidistará de los restantes vértices; si por el centro $\widehat{F}$ de $\widehat{C_c}$ trazamos la perpendicular al plano de $\widehat{C_c}$ todos los puntos de ésta equidistarán de los vértices de $\widehat{C_c}$ y por consiguiente pasará por el punto $\widehat{O}$ que ya hemos demostrado equidista de tres de ellos (los $\widehat{D}$, $\widehat{M}$ y $\widehat{E}$).

Repitiendo este razonamiento para otra nueva cara contigua se demuestra la equidistancia de $\widehat{O}$ para los nuevos vértices, y así sucesivamente hasta agotar todas las caras del arquimediano, lo que demuestra la propiedad enunciada.

5.22 Pasemos ahora a demostrar la propiedad en los polie-

UNE A4 210 X 297

dros arquimedianos cuyos ángulos sólidos son tetraedros.

Este grupo lo forman los arquimedianos III al VI y los infinitos de la serie A.

Observemos previamente que en todos ellos existen, al menos, dos caras iguales, y que en la ordenación de sus caras alrededor de sus vértices respectivos están siempre alternadas dos caras iguales, pues ya vimos en el estudio de los poliedros III, IV y V (casos 4, 12 y 16 del párrafo 3.12) que no existe arquimediano de estos tipos con una ordenación consecutiva de sus caras iguales, pero sí cuando están alternadas.

Consideremos (fig. 23) las cuatro caras que forman un ángulo sólido del poliedro, en el que, al menos, dos de ellas son iguales. Sean $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ dos caras desiguales de arista común $\overline{MN}$ y supongamos que la cara tercera, opuesta a la $\widehat{C_b}$ es la igual a ésta; la cuarta $\widehat{C_c}$ podrá ser igual o no a la opuesta $\widehat{C_a}$.

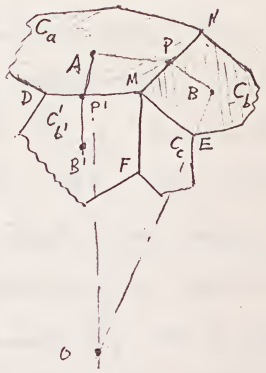


Figura 23

Tracemos por el punto $\widehat{P}$, medio del segmento $\overline{MN}$ un plano perpendicular a éste; dicho plano cortará a las caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ según rectas perpendiculares a $\overline{M-N}$, las cuales pasarán a su vez por los centros $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ de los polígonos regulares que forman dichas caras.

UNE A4 210 X 297

Tracemos a continuación por $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ rectas perpendiculares a las caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$, que estarán contenidas en el plano perpendicular a ambas $\widehat{APB}$, y que se cortarán en dicho plano en el punto $\widehat{O}$, ya que las dos caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ forman entre sí un determinado ángulo diedro.

El punto $\widehat{O}$ equidistará de $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$, así como de los restantes vértices de los dos polígonos $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ que, supuestos unidos al centro $\widehat{O}$, formarán dos pirámides rectas regulares de bases $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ y alturas respectivas $\widehat{AO}$ y $\widehat{BO}$; por consiguiente, los vértices $\widehat{D}$ y $\widehat{E}$, extremos de las aristas contiguas a las restantes caras $\widehat{C_b'}$ y $\widehat{C_c}$ del ángulo sólido $\widehat{M}$, equidistan de $\widehat{O}$.

Ahora bien, en cada lado del polígono regular $\widehat{C_a}$, existirá una cara contigua a $\widehat{C_a}$ de arista común igual a dicho lado, siendo dichas nuevas caras iguales a la $\widehat{C_b}$, y formando con ella el mismo ángulo diedro $\widehat{APB}$ que tienen las dos caras iniciales. Por consiguiente, las perpendiculares trazadas al plano de dichas caras por sus centros respectivos pasarán también todas ellas por el punto $\widehat{O}$, por lo que este punto equidistará a su vez de todos los restantes vértices de los nuevos polígonos considerados. Con esto se llega a la conclusión de que la cara $\widehat{C_c}$ que tiene tres puntos de ella $\widehat{M}$, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$ equidistantes de $\widehat{O}$, tendrá también equidistantes sus restantes vértices, así como los correspondientes a los nuevos vértices del po-

UNE A4 210 X 297

tígono $\widehat{C_a}$.

Repitiendo este razonamiento tomando inicialmente una cara $\widehat{C'_{b'}}$ igual a la $\widehat{C_b}$, cuyos vértices se ha demostrado anteriormente equidistan ya de $\widehat{O}$, contigua a otra $\widehat{C'_{a'}}$ igual a la $\widehat{C_a}$ y con el mismo ángulo diedro, se deduce a su vez la equidistancia de $\widehat{O}$ de los nuevos vértices del polígono $\widehat{C'_{a'}}$, y así sucesivamente hasta agotar todas las caras del tipo $\widehat{C_a}$ del poliedro, lo que demuestra la propiedad enunciada.

5.23 Finalmente, queda por demostrar la propiedad en los arquimedianos cuyos ángulos sólidos son pentaedros.

Este grupo lo forman exclusivamente los arquimedianos I y II formados por cuatro caras triangulares (iguales) y una quinta cuadrada o pentagonal respectivamente.

Tomando como base la cara desigual de 4 ó 5 lados (fig. 24) de vértices 1, 2, 3..., y considerando las caras triangulares adyacentes $\widehat{1\cdot6\cdot2}$, $\widehat{2\cdot9\cdot3}$, $\widehat{3\cdot8\cdot4}$... que forman ángulos diedros iguales con la cara base $\widehat{1\cdot2\cdot3\ldots}$ y siguiendo el mismo razonamiento del grupo anterior de ángulos sólidos tetraedros, llegaríamos a la conclusión de que los vértices $\widehat{1\cdot2\cdot3\ldots}$ del primer polígono y los $\widehat{6, 7, 8, \ldots}$ de sus caras adyacentes, equidistan todos de un mismo

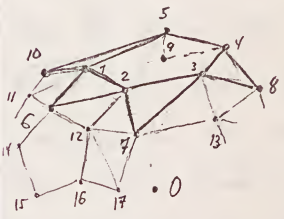


Figura 24

UNE A4 210 X 297

punto $\widehat{0}$ del espacio interior del poliedro, pero no nos demuestra la equidistancia de $\widehat{0}$ de los restantes vértices $\widehat{11}$, $\widehat{12}$, $\widehat{13}$ ... que se obtienen al completar con todas sus caras los ángulos sólidos de vértices $\widehat{1}$, $\widehat{2}$, $\widehat{3}$, ... de la cara inicial.

Mas teniendo en cuenta la ordenación de las cinco caras en cada ángulo sólido del poliedro $\overline{(P_3 - P_3 - P_{5(0\text{-}4)} - P_3 - P_3)}$, podemos deducir la simetría del mismo con respecto a un plano que pase por la arista que deje en semiespacios distintos a dos caras triangulares; en la figura 12, la arista $\overline{2-12}$ perteneciente p. e. al vértice $\widehat{2}$ y el centro $\widehat{0}$ obtenido anteriormente, determinan un plano que es plano de simetría del ángulo sólido en $\widehat{2}$ ya que divide al espacio en dos semiespacios, en uno de los cuales se encuentran las caras triangulares $\overline{1\cdot6\cdot2}$; $\overline{2\cdot6\cdot12}$, y en el opuesto las $\overline{2\cdot12\cdot7}$, $\overline{2\cdot7\cdot3}$. Por la misma razón, la arista $12\cdot7$ pertenece al plano de simetría del angulo sólido $\widehat{12}$ de la cara contigua pentagonal (o cuadrada) $\overline{6\cdot14\cdot15}$ - $\overline{16\cdot12}$. Así pues, se deduce de esta simetría que los diedros formados en las aristas $\overline{2-6}$ y $\overline{2-7}$ por las dos caras triangulares $\overline{1\cdot6\cdot2}$, $\overline{2\cdot6\cdot12}$ y $\overline{2\cdot12\cdot7}$, $\overline{2\cdot7\cdot3}$ respectivamente, son iguales entre sí, por simetría con respecto al plano $\overline{2\cdot12\cdot0}$; igualmente son iguales los diedros formados en las aristas $\overline{2\cdot12}$ y $\overline{12\cdot17}$ por las dos caras triangulares $\overline{2\cdot6\cdot12}$, $\overline{2\cdot12\cdot7}$ y $\overline{12\cdot7\cdot17}$, $\overline{12\cdot17\cdot16}$ son también iguales entre sí, por simetría con respecto al plano $\overline{12\cdot7\cdot0}$, e iguales a los anteriores

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 91 al 100

(todos los ángulos sólidos son iguales). Con esto llegamos a la conclusión de que los diedros formados entre sí por las cuatro caras triangulares del ángulo sólido $\widehat{2}$, son todos iguales.

De la igualdad de estos diedros se deduce que la pirámide formada por las cuatro caras triangulares alrededor del vértice $\widehat{2}$, tiene su base $\overline{1 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 3}$ plana, y los vértices de ésta en una circunferencia (las aristas laterales de dicha pirámide son todas iguales).

Como ya hemos demostrado al principio que los vértices $\overline{1, 6, 7, 3}$ equidistan de $\widehat{0}$ y el $\widehat{12}$ es concíclico con aquéllos, se deduce que el vértice $\widehat{12}$ también equidista de $\widehat{0}$, así como los restantes que forman la orla del casquete compuesto por una cara decigonal del poliedro y todas las triangulares que completan los ángulos sólidos de los vértices de dicha cara.

Al ser válida esta conclusión para una cara decigonal cualquiera, lo será para todas las restantes que se obtengan al ir completando el poliedro, con lo cual queda demostrada la propiedad enunciada.

5.3 En todo poliedro arquimediano, existe una esfera que es tangente en su punto medio a todas sus aristas, y cuyo centro coincide con el de la esfera circunscrita.

Según se deduce de las propiedades 5.1 y 5.2, cualquier

UNE A4 210 X 297

arista y el centro $\hat{O}$ de la esfera circunscrita determinan un plano que corta a la esfera según un círculo máximo de la misma y que pasa por los extremos de dicha arista; ésta será pues la cuerda de una circunferencia de radio constante cuyo punto medio equidista siempre de su centro. (punto de contacto de la circunferencia de centro $\hat{O}$, tangente a la arista).

5.4 En todo poliedro arquimediano existe una esfera que es tangente en su centro a todas las caras de igual tipo; el centro de dicha esfera coincide con el de la circunscrita.

En efecto, la superficie de un poliedro arquimediano está limitada parcialmente por polígonos regulares iguales, cuyos vértices son vértices de ángulos sólidos situados en la esfera circunscrita (5.1). Al unir los vértices de cada polígono con el centro $\hat{O}$ de dicha esfera se nos formarán pirámides rectas regulares iguales para cada tipo de polígono, y por lo tanto de altura constante. Esta altura será pues el radio de una esfera tangente a la cara correspondiente en el centro de la misma.

Por consiguiente habrá una esfera tangente por cada tipo de caras que concurran en un vértice cualquiera y según hemos visto anteriormente (ver párrafo 2.2, 4ª condición) sólo son posibles como máximo tres diferentes

UNE A4 210 X 297

y como mínimo dos.

De lo expuesto se deduce que "en todo poliedro arquimediano existen como mínimo dos, y como máximo tres esferas tangentes a sus caras iguales". El centro de dichas esferas es coincidente con el de la circunscrita.

5.5 En todo poliedro arquimediano, el polígono convexo que se obtiene al unir ordenadamente los extremos de las aristas que concurren en cualquier vértice, es plano y está inscrito en una circunferencia

Como las aristas de un arquimediano son todas iguales, (5.1) y sus extremos están situados en una esfera única (5.2) circunscrita al poliedro, si con una abertura de compás igual a la arista y centro en un vértice cualquiera, trazamos en la esfera circunscrita una circunferencia, ésta pasará por los extremos de las aristas que concurran en dicho vértice (son todas iguales); si unimos en esta circunferencia los extremos de las aristas correspondientes en forma sucesiva, se nos formará un polígono convexo de tantos lados como caras tiene el mencionado ángulo sólido, que será plano (sus vértices pertenecen a una circunferencia), convexo (se unen los puntos sucesivamente en la circunferencia), e inscrito en la misma.

UNE A4 210 X 297

5.6 Resumen de las propiedades geométricas de los poliedros arquimedianos

Como resumen de lo expuesto anteriormente, damos seguidamente las principales propiedades geométricas de todo poliedro arquimediano, ya demostradas.

En todo poliedro arquimediano se verifica que:

5.1 Todas sus aristas son iguales.

5.2 Existe una esfera circunscrita al poliedro, que contiene todos sus vértices.

5.3 Existe una esfera tangente a las aristas en su punto medio, concéntrica con la circunscrita.

5.4 Existe, para cada tipo de cara, una esfera tangente a ellas en su centro, concéntrica con la circunscrita. El número de esferas será de dos o tres, según el caso

5.5 El polígono convexo que se obtiene al unir consecutivamente los extremos de las aristas que concurren en cualquier vértice, es plano e inscribible en una circunferencia. Dicho polígono solo podrá tener tres, cuatro o cinco lados, y al menos, uno desigual, según el caso.

UNE A4 210 X 297

6. Propiedades métricas de los poliedros arquimedianos

En el estudio que realizamos a continuación vamos a deducir fórmulas generales que nos sirvan para la determinación de los principales elementos comunes a todos los arquimedianos, para su posterior aplicación a cada tipo particular.

Todas las fórmulas obtenidas lo serán en función del lado l del arquimediano, y para ello utilizaremos preferentemente las propiedades métricas que se estudian en la Geometría racional. Sólo excepcionalmente, y cuando esto no sea posible, acudiremos al cálculo trigonométrico, a las ecuaciones de la Geometría analítica, e incluso al cálculo logarítmico que facilita las soluciones numéricas de estos últimos cálculos.

Simultáneamente haremos uso, para la representación del poliedro, de dibujos en el sistema diédrico, acotados convenientemente en sus proyecciones siguiendo las reglas correspondientes empleadas en el dibujo técnico, de gran precisión y claridad.

En la parte deductiva y como aclaración a ella, utilizaremos por el contrario figuras representadas axonométricamente que permiten seguir con más facilidad el razonamiento geométrico.

6.1 Deducción de fórmulas generales a aplicar en el

cálculo de magnitudes fundamentales comunes a todo poliedro arquimediano.

Consideraremos como dato único y básico, para el cálculo general de magnitudes lineales en un poliedro arquimediano, la longitud $\widehat{l}$ de la arista del mismo.

Las fórmulas generales que deduciremos a continuación, se refieren a las siguientes magnitudes:

1) Radio $\widehat{a}$ de la esfera circunscrita
2) Radio $\widehat{b}$ de la esfera tangente a las aristas
3) Radio $\widehat{c_n}$ de la esfera inscrita (el subíndice $\widehat{n}$ se referirá al número de lados que tenga el polígono de la cara a la cual es tangente la esfera; en cada arquimediano, $\widehat{n}$ sólo podrá tener dos o tres valores distintos).
4) Angulo $\widehat{\varphi_{pq}}$ del diedro formado por dos caras contiguas (los subíndices $\widehat{p}$ y $\widehat{q}$ se refieren a los números de lados que tengan respectivamente los polígonos de ambas caras).
5) Radio $\widehat{d_n}$ de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara (el subíndice $\widehat{n}$ de igual significado que en 3).
6) Radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita al polígono convexo no regular obtenido al unir

los extremos de las aristas concurrentes en un vértice

Para el cálculo de estos elementos consideremos un ángulo sólido de cualquier arquimediano, en cuyo vértice concurrirán tantas aristas como caras lo formen, siendo éstas polígonos regulares de dos o tres tipos diferentes.

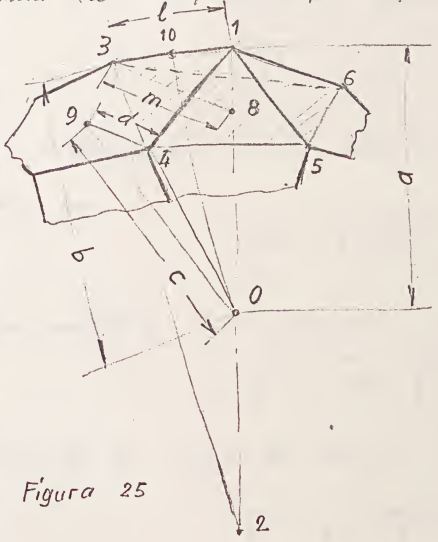


Figura 25

Sea (fig. 25) $\hat{1}$ el vértice de dicho ángulo sólido, y $\overline{3,4,\ldots 6}$ los vértices contiguos que formarán un polígono convexo, no regular, inscrito en una circunferencia (ver párrafo 5.5) y de tantos lados como sean las caras concurrentes (tres, cuatro o cinco). La pirámide $\overline{1-3\cdot4\cdot5\ldots}$ será recta (ver parrafo 5.5) y su altura $\overline{1\cdot8}$ pasará por el centro $\hat{0}$ de la esfera circunscrita (el punto $\hat{8}$ a su vez es el centro de la circunferencia circunscrita a la base).

Consideremos también el punto $\hat{9}$, centro de una cara, y el $\hat{10}$, centro de una arista.

En la figura se acotan los segmentos siguientes: $\overline{(0\cdot1)} = a$; $\overline{(0\cdot10)} = b$; $\overline{(0\cdot9)} = c$; $\overline{(4\cdot9)} = d$; $\overline{(3\cdot8)} = m$ y $\overline{(3\cdot1)} = l$.

Si $\hat{2}$, punto simétrico de $\hat{1}$ con respecto a $\hat{0}$, lo unimos con $\hat{3}$, el triángulo $\overline{(1\cdot2\cdot3)}$ será rectángulo en $\hat{3}$,

UNE A4 210 X 297

por ser el segmento $\overline{(1\cdot 2)}$ diámetro de la esfera circunscrita al poliedro; por otra parte se verifica que $\overline{(1\cdot 8)}$ es la proyección de $\overline{(3\cdot 1)}$ sobre $\overline{(1\cdot 2)}$. Por consiguiente tendremos que

$$\overline{(3\cdot 1)}^2 = \overline{(1\cdot 2)} \times \overline{(1\cdot 8)}$$

El triángulo $\overline{(3\cdot 8\cdot 1)}$ también es rectángulo en $\overline{8}$, verificándose que

$$\overline{(1\cdot 8)}^2 = \overline{(3\cdot 1)}^2 - \overline{(3\cdot 8)}^2$$

que sustituido en la primera, nos da

$$\overline{(3\cdot 1)}^2 = \overline{(1\cdot 2)} \times \sqrt{\overline{(3\cdot 1)}^2 - \overline{(3\cdot 8)}^2}$$

teniendo en cuenta las cotas de la figura, tendremos

$$\overline{l^2 = 2a\sqrt{l^2 - m^2}}$$

y despejando $\overline{a}$

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} \qquad [1]$$

fórmula que nos permite calcular el radio $\overline{a}$ de la esfera circunscrita a cualquier arquimediano, en función de su lado $\overline{l}$, calculando previamente $\overline{m}$ para cada caso particular, siendo $\overline{m}$ el radio de la circunferencia circunscrita al polígono convexo no regular, obtenido al unir los extremos de las aristas concurrentes en un vértice.

Si unimos el centro $\overline{9}$ de una cara con uno de sus

vértices $\widehat{4}$ (fig. 25), y éste con $\widehat{0}$, el triángulo $\widehat{(4\cdot9\cdot0)}$ formado, será rectángulo en $\widehat{9}$, por lo que tendremos:

$$\overline{(0\cdot9)} = \sqrt{\overline{(0\cdot4)}^2 - \overline{(4\cdot9)}^2}$$

o sea

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} \qquad [2]$$

fórmula que nos permite calcular los radios $\widehat{c_p}$, $\widehat{c_q}$, $\widehat{c_r}$ de la esfera circunscrita a las caras del arquimediano correspondientes a los polígonos regulares de $\widehat{p}$, $\widehat{q}$ y, en su caso, $\widehat{r}$ lados, en función del radio $\widehat{a}$ (fórmula [1]) de la esfera circunscrita, calculando previamente el radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita a la respectiva cara.

Si unimos (fig. 25) el centro $\widehat{10}$ de una arista con $\widehat{0}$, el triángulo $\widehat{(1\cdot10\cdot0)}$ será rectángulo en $\widehat{10}$, por lo que

$$\overline{(0\cdot10)} = \sqrt{\overline{(0\cdot1)}^2 - \overline{(10\cdot1)}^2}$$

o sea

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} \qquad [3]$$

fórmula que nos permite calcular el radio $\widehat{b}$ de la esfera tangente a las aristas, en función del lado $\widehat{l}$ y del radio $\widehat{a}$ de la esfera circunscrita al arquimediano (ver fórmula [1])

UNE A4 210 X 297

Para el cálculo del diedro φ_{pq}, formado por dos caras consecutivas, operaremos como sigue: Sean (fig. 26) $\widehat{C_p}$ y $\widehat{C_q}$ dos caras contiguas de $\widehat{p}$ y $\widehat{q}$ lados respectivamente, y arista común $\widehat{(1\cdot 2)}$, cuyos centros respectivos son los puntos $\widehat{3}$, $\widehat{4}$; unamos estos centros y el punto medio $\widehat{5}$ de la arista $\widehat{(1\cdot 2)}$ con el centro $\widehat{O}$ de la esfera circunscrita.

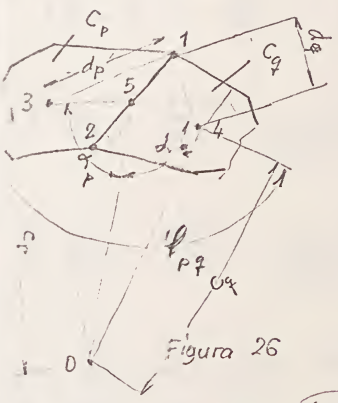


Figura 26

Siendo C_p y C_q polígonos regulares, las rectas $\widehat{(3\cdot 5)}$ y $\widehat{(5\cdot 4)}$ serán perpendiculares a la arista común $\widehat{(1\cdot 2)}$, y por consiguiente el plano $\widehat{(3\cdot 5\cdot 4)}$ determinado por ellas será a su vez perpendicular a $\widehat{(1\cdot 2)}$; como los extremos 1 y 2 de la arista están en la esfera circunscrita al poliedro, dicho plano pasará a su vez por el centro $\widehat{O}$ de la misma, por lo que contendrá a las rectas $\widehat{O\cdot 3}$ y $\widehat{O\cdot 4}$.

Uniendo los centros 3 y 4 de las dos caras contiguas C_p y C_q con el extremo $\widehat{1}$ de su arista común, los segmentos $\widehat{(3\cdot 1)}$ y $\widehat{(4\cdot 1)}$ serán respectivamente los radios $\widehat{d_p}$ y $\widehat{d_q}$ de las correspondientes circunferencias circunscritas a los polígonos C_p y C_q.

De la figura se deduce pues que

$$\varphi_{pq} = \alpha_p + \alpha_q \qquad [4]$$

llamando $\widehat{l}$ a la arista $\widehat{(1\cdot 2)}$ será

$$\widehat{3\cdot 5} = \sqrt{d_p^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad \text{y} \quad \widehat{4\cdot 5} = \sqrt{d_q^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}, \quad \text{de donde}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_p &= \frac{3\cdot 0}{3\cdot 5} = \frac{c_p}{\sqrt{(d_p)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{2\,c_p}{\sqrt{4\,(d_p)^2 - l^2}} \\ \operatorname{tg} \alpha_q &= \frac{4\cdot 0}{4\cdot 5} = \frac{c_q}{\sqrt{(d_q)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{2\,c_q}{\sqrt{4\,(d_q)^2 - l^2}} \end{aligned}\right\} \quad [5]$$

con las fórmulas [4] y [5], teniendo en cuenta el valor de $\widehat{c}$ para las caras de $\widehat{p}$ y $\widehat{q}$ lados (ver fórmula [2]), puede calcularse el valor del ángulo rectilíneo del diedro formado por dichas caras.

BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
600107499

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA
INDUSTRIAL DE SEVILLA

ESTANTE.....

TABLA.....

NUMERO 7815